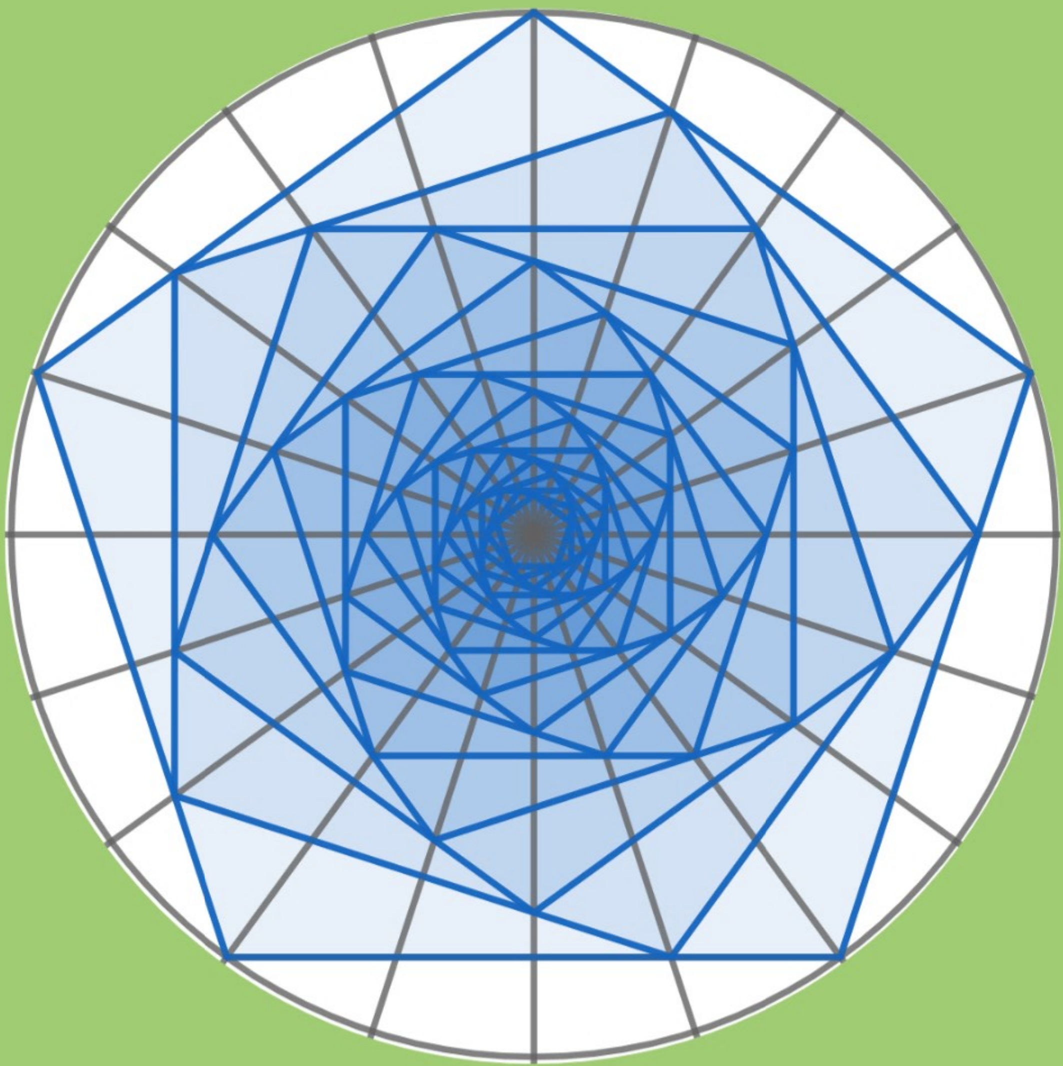
DRUGA GIMNAZIJA SARAJEVO

MATIX

MATEMATIČKI ČASOPIS ZA UČENIKE OSNOVNIH I SREDNJIH ŠKOLA



SARAJEVO, FEBRUAR 2020. GODINE

MATEMATIČKI ČASOPIS

UČENIKA DRUGE GIMNAZIJE SARAJEVO

Urednici: Boris Stanković, Sandro Paradžik, Emira Omeragić prof.

Dizajn naslovne strane: Hana Ćatić

SADRŽAJ

UVODNA RIJEČ

Poštovani čitatelji, veliko mi je zadovoljstvo upoznati vas sa časopisom koji su kreirali učenici Druge gimnazije Sarajevo.

Osnovna ideja časopisa je da učenici prezentiraju oblasti matematike koje su ih inspirisali u određenom periodu njihovog matematičkog sazrijevanja.

Ideja je nastala spontano, kao prirodna pojava prezentacije rada i uspjeha učenika Druge gimnazije Sarajevo u matematici i njihove želje da se povežu sa svojim vršnjacima i da tako svi postanemo jači u svom radu.

Nakon članaka koji su zapravo neka tekstualna predavanja slijede obično i zadaci za samostalni rad. Možete nas kontaktirati na gore navedeni mail, ako želite saznati izvor zadatka na kom možete pogledati rješenje. A svakako ćemo sva rješenja (ili većinu njih) objaviti na stranici Druge gimnazije Sarajevo ili u narednom broju.

Osim rješenja možete slati svoje konstruktivne prijedloge i sugestije.

Krajnji cilj je da kroz ovaj časopis motivišemo učenike osnovnih i srednjih škola da izučavaju matematiku.

Ovo je prvo izdanje i u narednim trebamo zajedno da se potrudimo da mladi matematičari udruže snage kako bi napredovali.

Želimo da čitateljima približimo ljepote matematike kao nauke koja pokreće čovječanstvo.

Omeragić Emira, prof.

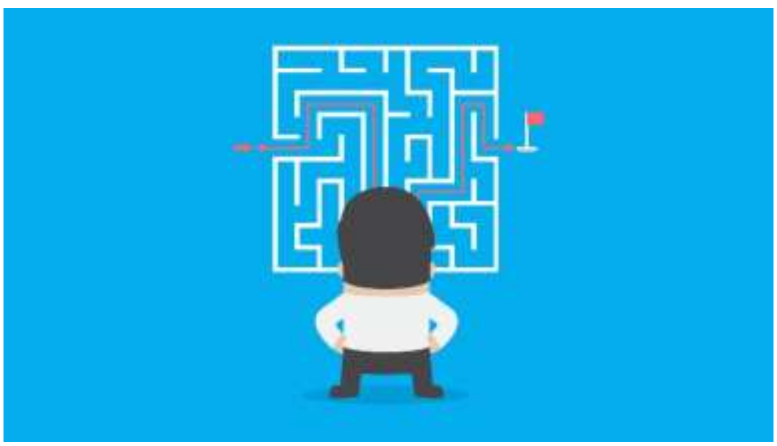
Na slici iznad se nalaze učenici koji su pisali članke za ovaj časopis. To su (s lijeva na desno, prvo red sa više učenika): Mirnes Fehrić, Imana Alibašić, Esma Mašić, Adi Hujić, Ervin Macić, Boris Stanković, Lav Balašev-Samarski, Sandro Paradžik, Hana Ćatić.

KOMBINATORIKA

Boris Stanković je učenik II_1 razreda. Osvajač je srebrnih medalja na BMO[1] 2019, JBMO[2] 2018, bronzane medalje na JBMO 2017 i počasne pohvale na IMO[3] 2019, višestruki pobjednik kampova[4] (2017. ljetni i 2018. zimski u srednjoj grupi, 2018. ljetni u predolimpijskoj, 2019. ljetni i 2020. zimski u olimpijskoj grupi). Kombinatorika je razlog što je zavolio matematiku i želi vas uvesti u tu oblast.

Omiljena oblast svih takmičara. Vjerovatno niste imali priliku da se susretnete s kombinatorikom u osnovnoj školi, a u ovom članku upoznat ćemo se različitim zadacima iz kombinatorike. Ona obuhvata sve logičke i problemske zadatke. U kombinatorici za razliku od drugih oblasti ne postoje neke formule ili standardne ideje pomoću kojih rješavamo zadatke. Sa zadacima iz kombinatorike se prije svega trebamo igrati, trebamo izdvojiti malo više vremena i pokušati razumjeti neki proces koji se dešava u zadatku, primijetiti šta nas ograničava i sl.

Upravo to što ne postoji neka generalna strategija za rješavanje ovih zadataka čini kombinatoriku najzanimljivim dijelom matematike jer je svaki zadatak zapravo priča za sebe. Često je rješavanje kombinatoričkog zadatka kao proanalženje puta kroz labirint.



Prije nego što počnemo s primjerima zadataka iz kombinatorike, evo šta par ljudi koji su u bh. matematici poznati kao najbolji kombinatoričari kažu o kombinatorici:

Nevena Radešić (**osvajačica bronzanih medalja na EGMO[5] 2018 i 2019**):

„Više bih voljela da na kampu imam 100 bodova na zadacima iz kombinatorike (op.a. uradim sva 4 zadatka iz kombinatorike, na kampu imaju 4 testa, svaki po 4 zadatka koji nose po 25 bodova), nego da imam 300 bodova iz svih ostalih oblasti, a ne uradim

[1] Balkanska matematička olimpijada
[2] Juniorska balkanska matematička olimpijada
[3] Internacionalna matematička olimpijada
[4] Matematičkih kampova za nadarene matematičare u organizaciji Udruženja matematičara Kantona Sarajevo
[5] Evropska matematička olimpijada za djevojke

nijednu kombinatoriku. Kombinatorika mi je omiljena oblast i svi najljepši zadaci koje sam uradila bili su iz kombinatorike.“

Marko Dimitrić **(pobjednik Ljetnog kampa 2018. i Zimskog kampa 2020. godine i osvajač bronzane medalje na Olimpijadi metropola 2019. iz informatike)**:

„Matematiku volim da radim zbog onog *AHA osjećaja* kad otkrijem lijepo rješenje nekog problema, a zadaci su najljepšim rješenjima su upravo oni iz kombinatorike i osjećaj koji imam kada uradim određene zadatke iz te oblasti je neuporediv sa onim nakon drugih zadataka. Sviđa mi se što se kombinatorika mnogo manje od ostalih oblasti oslanja na reciklažu ideja iz drugih zadataka. Pored toga dodatno volim kombinatoriku jer je kombinatorni tip razmišljanja jako koristan u programiranju koje takođe jako volim.“

Esma Mašić **(pobjednica Zimskog i Ljetnog kampa 2019, osvajačica bronzane medalje na EGMO 2019, bronzane medalje na JBMO 2018)**: „Kombinatorika je oblast matematike koja ima najveću primjenu u životu od svih oblasti s kojima sam se susretala. U njoj se najjednostavnijim idejama mogu riješiti najkompleksniji problemi što me zaista impresionira“

Sandro Paradžik **(osvajač 1. mjesta na Federalnom takmičenju za 2. razrede srednje škole 2019)**: „Za mene je kombinatorika kao umjetnost, način da izrazim svoj način razmišljanja i kreativnost. Moja ljubav prema njoj je oduvijek samo rasla. Sviđa mi se to što nam nije potrebno nikakvo predznanje da bismo rješavali zadatke iz kombinatorike. Volim kombinatoriku jer u njoj imam najveću slobodu razmišljanja, to mi je uz programiranje i fotografiju, omiljeni način da ispoljim svoju kreativnost.“

Oni naizgled vole slične stvari u kombinatorici, ali vjerujem da bi vam svako od njih mogao satima pričati o tome šta tačno voli u vezi ove kraljice matematike. Svaka ta priča je posebna i svi oni bi vam oduševljeno pričali o zadacima koji su ih fascinirali.

Šta oni toliko vole u kombinatorici nećete dokučiti samo čitanjem ovog članka, ali nadamo se da ćete se zabaviti pokušavajući riješiti slijedeće zadatke i da ćete uz njih zavoliti kombinatoriku. U primjerima koji slijede bit će par zadataka koji su više nalik na zagonetke, ali i par kombinatoričkih zadataka kakvi se mogu naći na matematičkim takmičenjima.

Primjer 1:

Na svakoj karti u kutiji napisan je jedan od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6 ili 7 (na svakoj karti je napisan jedan broj i svaki od brojeva je napisan na tačno jednoj karti). Naida uzima tri karte iz kutije, pogleda ih i ne pokazuje ih Esmi. Nakon toga, Esma uzima dvije karte iz kutije i ne pokazuje Naidi koje je karte uzela. Naida kaže Esmi: Znam da je suma tvojih karata parna.

Esma i Naida ne znaju koje su karte ostale u kutiji. Kolika je suma karata koje je izvukla Naida?

Rješenje: *Naida je morala biti sigurna nakon što je izvukla svoje 3 karte da će suma bilo koje dvije karte koje Esma izvuče biti parna. To je moguće samo ako, nakon što je Naida izvukla svoje karte, u kutiji su sve karte iste parnosti. Kako su u kutiji ostale 4 karte, jedina opcija je da su u kutiji ostale sve 4 neparne karte.*

To je moguće ako je Naida izvukla sve 3 parne karte, pa je njihova suma 2+4+6=12.

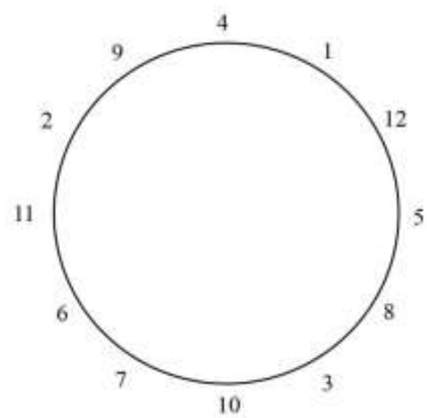
Primjer 2:

Prirodan broj n zovemo lijepim ako je moguće na krug poredati brojeve 1,2,...,n tako da je zbir svaka 2 susjedna broja na krugu prost broj.

Da li su brojevi: $n = 12; n = 13$ lijepi?

U zadacima ovakvog tipa ukoliko je n lijep dovoljno je naći jedan primjer koji to potvrđuje, a u suprotnom obrazložiti zašto taj broj nije lijep.

Rješenje: *a) Broj 12 je lijep je što potvrđuje ovaj raspored brojeva na krugu*



b) Ako pokušamo napraviti raspored s 13 brojeva ne uspijevamo, pa ćemo probati dokazati da 13 nije lijep broj broj.

Primjećujemo da ako bi 13 bio lijep tada ne bismo smjeli imati 2 susjedna broja iste parnosti na krugu jer njihov zbir je sigurno paran broj i veći jednak 4 pa ne može biti prost broj.

Među brojevima 1, 2, ..., 13 nalazi se 7 neparnih i 6 parnih brojeva.

Zbog toga ćemo dokazati da kako god rasporedili ovih 13 brojeva na krug, imati 2 susjedna broja iste parnosti na krugu. Krenemo od nekog proizvoljnog neparnog broja na krugu. Tada njegov susjed u smjeru kazaljke na satu mora biti paran ili smo odmah gotovi. Sada njegov susjed mora biti neparan. Dobijamo tako da brojevi idu u rasporedu **NPNPNPNPNPNPN**, *a krajnji brojevi u ovom nizu su susjedni.*

Dakle, kako god rasporedili 13 brojeva na krug postoje 2 susjedna iste parnosti, pa 13 nije lijep broj.

Primjer 3: Po krugu su napisani brojevi od 1 do N, tako da svaka dva susjedna broja imaju bar jednu zajedničku cifru. Naći najmanji prirodan broj $N > 1$ za koji je ovo moguće.

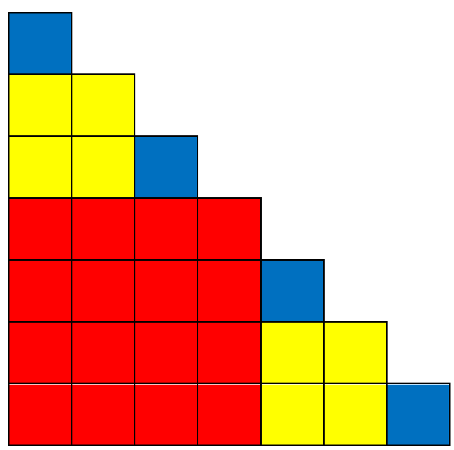
Rješenje: *Očigledno vrijedi da je $N > 9$, jer za jednocifrene brojeve nije moguće ispuniti uslov zadatka. Kako susjed broja 9 mora sadržavati cifru 9, to je $N \geq 29$ (jer moramo imati bar još dva broja koji sadrže cifru 9). Za $N = 29$ moguće je ispuniti uslove zadatka. Možemo npr. napraviti sljedeći raspored:*
1,11,10,20,21,12,2,22,23,3,13,14,4,24,25,5,15,16,6,26,27,7,17,18,8,28,29,9,19.

Primjer 4: Ploča 7 × 7 je podijeljena na jedinične kvadratiće, te su iz nje odstranjeni svi kvadratići iznad glavne dijagonale. Koliko je minimalno kvadrata (nebitno kojih dimenzija, dakle smijemo koristiti kvadrate 1×1, 2×2, 3×3, 4×4...) potrebno da se poploča ostatak figure (stranice kvadrata su prirodni brojevi)?

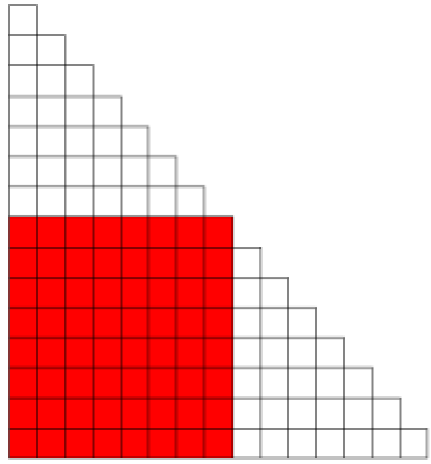
A za ploču 15 ×15?

U zadacima ovakvog tipa ukoliko je vaše rješenje broj x potrebno je da navedete (nacrtate) kako je to moguće s x kvadrata, ali i da objasnite zašto nije moguće s manje od x kvadrata.

Rješenje: *Primijetimo da nam je za svaki od ćoškova „stepenica“ potreban po jedan poseban kvadrat jer nikoja dva ćoška ne možemo obuhvatiti istim kvadratom. Dakle minimalno nam treba 7 kvadrata za 7×7, odnosno 15 za 15×15. Sa 7 kvadrata možemo na slijedeći način:*



Za 15×15 možemo na slijedeći način, stavimo centralni 8×8 i onda nam ostanu dvoje stepenice 7×7 koje znamo da možemo zasebno svake sa po 7 kvadrata.



Primjer 5:

Na tabli je napisano 8 brojeva, od kojih je svaki jednak nuli. U jednom koraku dozvoljeno je izabrati proizvoljna 4 broja a, b, c, d, i zamjeniti ih redom sa $a + 3, b + 3, c + 2, d + 1$.

a) Koji je najmanji broj koraka koje je potrebno izvršiti da bi se na tabli dobilo 8 uzastopnih brojeva?

b) Da li je moguće dobiti da su svi brojevi na tabli jednaki 2019?

c) Da li je moguće na tabli dobiti brojeve čiji je proizvod jednak 2145?

Rješenje: *a) Najmanjih 8 nenegativnih uzastopnih cijelih brojeva su $0,1,\dots,7$ i njihov zbir je 28. Kako u svakom koraku povećamo ukupan zbir brojeva na tabli za 9, to su nam potrebna bar 4 koraka (jer je $3 \cdot 9 < 28$). S druge strane, 4 koraka su dovoljna, što pokazuje sljedeći niz koraka:*

$$(0,0,0,0,0,0,0,0) \to (1,2,0,0,0,0,3,3) \to (1,2,2,1,0,0,6,6) \to$$

$$\to (1,2,2,1,3,3,7,8) \to (1,2,3,4,5,6,7,8).$$

b) U svakom koraku zbir brojeva na tabli se poveća za 9, pa će nakon k koraka zbir brojeva na tabli biti $9k$. Kako $8 \cdot 2019$ nije djeljivo sa 9, to nikad nećemo dobiti da su svi brojevi na tabli jednaki 2019.

c) Pretpostavimo da je moguće. Kako je $2145 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$, to na tabi moramo imati bar 4 jedinice (jer su brojevi 3,5,11,13 prosti). Ako bi imali tačno 4 jedinice, onda bi brojevi na tabli bili 1,1,1,1,3,5,11,13, čiji je zbir 36, pa moramo izvršiti tačno 4 koraka. Međutim, sa 4 koraka nije moguće dobiti broj 13 na tabli (jer se neki broj poveća najviše za 3 pa možemo dobiti maksimalno $4 \cdot 3 = 12$). Primijetimo sada da je nemoguće da imamo 6 ili više jedinica, jer bi onda na tabli bila najviše dva broja koji *nisu jedinice, što nije moguće jer u svakom koraku povećamo 3 broja za više od 1. Ostaje nam još slučaj kada imamo 5 jedinica. Neka su brojevi na tabli 1,1,1,1,1,x,y,z. Da bi dobili tačno 5 jedinica, morali smo izvršiti tačno 5 koraka (jer u svakom koraku 3 broja povećavamo za više od 1, pa to moraju biti x,y,z, a ostalih 5 tačno jednom moramo povećati za 1). Dakle, 5 + x + y + z = 45, gdje je x proizvod 2 broja iz skupa {3,5,11,13}, a y i z su preostala dva elementa. Međutim, sa 5 koraka, najveći mogući broj koji se može dobiti je 15, pa vidimo da mora biti x = 15 (jer je proizvod bilo koja druga dva broja iz skupa veći od 15). Međutim, broj 5 + 15 + 11+ 13 = 44 nije djeljiv sa 9, pa je nemoguće da na tabli dobijemo brojeve čiji je proizvod jednak 2145.*

A, sada nemojte dopustiti da vaš susret s kombinatorikom završi samo na ovim zadacima. Evo nekih zadataka za samostalni rad, da se igrate s njima:

1. Dato nam je 25 konja koji su svi različite brzine, tj. kada se trkaju brži konj uvijek završi trku prije konja koji je sporiji. Dozvoljeno nam je organizovati trke u kojima učestvuje najviše 5 konja i zapisati koji je konj zauzeo koje mjesto u toj trci, ali ne možemo mjeriti vrijeme za koje su završili trku.

a) Koliko najmanje trka trebamo organizovati da bismo odredili najbržeg konja?

b) Koliko najmanje trka trebamo organizovati da bismo odredili tri najbrža konja?

(Pod a) je potrebno da objasnite zašto je nemoguće s manje trka, a pod b) je dovoljno da pronađete s koliko je trka moguće, poteško je skroz formalno dokazati da je to minimum)

2. Sandro je uzeo 9 kartica takvih da je na prvoj napisan broj 1, na drugoj broj 2, ..., te na devetoj broj 9. Promiješao je kartice i 5 kartica dao je Harisu, a 4 Adiju. Zatim je Haris pomnožio brojeve na svojim karticama i kao rezultat je dobio proizvod X. Adi je uradio isto sa svojim karticama i dobio proizvod Y. Da li je moguće da X i Y budu relativno prosti?

3. Neka je n prirodan broj i neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ brojevi od 1 do n u nekom redoslijedu (svaki od brojeva $1,2,\dots,n$ se javlja tačno jednom među brojevima $a_1, a_2, \dots, a_n$, ali ne moraju biti poredani po veličini). Da li je moguće da brojevi $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ svi daju različite ostatke pri dijeljenju sa $\boldsymbol{n}$, ako je:

a) $n = 6$, b) $n = 7$?

4. Nevena i Esma igraju sljedeću igru. Nevena će razrezati papir dimenzija 9x9 na pravougaonike cjelobrojnih dimenzija kojima je bar jedna dimenzija 1. Nakon toga će Esma odabrati prirodan broj $k, k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ i Nevena će joj dati onoliko novčića koliko iznosi ukupna površina svih pravougaonika dimenzija $1\text{x}k$ i $k\text{x}1$. Esma će odabrati k tako da od Nevene dobije što više novčića, a Nevena bi željela uštedjeti i pri tome dati Esmi što manje novčića.

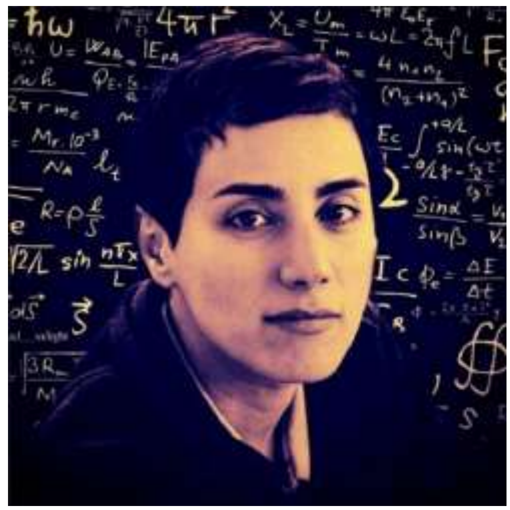
Koji je najmanji mogući broj novčića koji će Nevena dati Esmi?

ŽENE U MATEMATICI

Ovaj članak je napisala Esma Mašić, učenica II_1 razreda. Esma je osvajačica bronzanih medalja na EGMO 2019, JBMO 2018, dvostruka pobjednica na kampovima (2019. zimski u naprednoj i 2019. ljetni u predolimpijskoj grupi). Poznata je kao veliki borac za ženska prava i ovim putem vam želi približiti status žena u matematici.

Procenat žena u matematici je jako mali, bilo da se radi o matematičkim takmičenjima ili o karijeri u ovoj oblasti. Fields-ova medalja, matematički ekvivalent Nobelove nagrade, je samo jednom dodjeljena ženi, Maryam Mirzakhani.

Ona je bila iranska matematičarka i profesor matematike na Univerzitetu Stanford. Njezine su teme istraživanja uključivale Teichmüller teoriju, hiperboličku geometriju, ergodičku teoriju i simplektičku geometriju. Kao rezultat svog istraživanja, 2005. godine nagrađena je u četvrtom godišnjem časopisu Popular Brush „Briljantnih 10“ u kome je prepoznata kao jedan od prvih 10 mladih ljudi koji su pokrenuli svoja polja u inovativnim pravcima. Tokom svoje takmičarske karijere na IMO 1994. i 1995. godine osvojila je dvije zlatne medalje.



Maryam Mirzakhani

Iako je stanje puno bolje nego nekoliko godina unazad, na svjetskoj matematičkoj olimpijadi IMO 2019.godine od 621 učesnika bilo je svega 65 djevojaka od čega ih je samo 11 osvojilo medalju od ukupno osvojene 302 medalje. Uprkos tome na IMO Hall of fame 3.mjesto zauzima djevojka. U bh. matematici od 2010.godine je od ukupno osvojenih 22 medalje na IMO, 7 pripalo djevojkama.

Za razliku od ostalih država, BiH često ima nekoliko ženskih članova tima za IMO, dok njauspješnije ekipe npr. Amerika i Kina posljednjih nekoliko godina uopće nisu imale ženskog člana ekipe. Djevojke koje su obilježile posljednju deceniju u bh matematici su: Milica Đukić kojoj je pripalo jedno od dva srebra koje je BiH osvojila na IMO u posljednjih 10 godina, Adisa Bolić (osvojila dvije bronzane medalje na IMO, zlato i srebro na EGMO, tri bronze na BMO i zlato na EMC[6] u juniorskoj kategoriji pored čega je ostvarila još i brojne uspjehe na drugim internacionalnim i domaćim takmičenjima), Tijana Babić (dvije bronzane medalje na IMO, dva srebra i zlato na EGMO, tri bronze na BMO i brojne druge medalje) i Neira Kurtović (bronzana medalja na IMO, srebro na EGMO i bronza na BMO kao i značajni uspjesi na drugim takmičenjima).

2012.godine u Ujedinjenom Kraljevstvu po prvi put održana je Evropska matematička olimpijada za djevojke (European Girls' Mathematical Olympiad) čiji zadaci imaju sličan stil kao Međunarodna matematička olimpijada IMO, s dva testa po 3 zadatka koji se rade dva dana uzastopno. Zemlje učesnice šalju timove koji se sastoje od četiri matematičarke školskog uzrasta. Zadaci, iako su lakši od zadataka sa BMO, puno su ljepši i kreativniji tako da ćemo navesti par primjera:

(Zadatak 4. 2018.)

Pod $dominom$ podrazumijevamo pločicu dimenzija $1\ x\ 2$ ili $2\ x\ 1$.

Neka je ($n\ \geq\ 3$) prirodan broj. Na tabli dimenzija $n\ x\ n$, postavljen je neki broj domina, tako da svaka domina pokriva tačno dva polja table i ne postoje dve domine koje se preklapaju. $Vrijednost$ vrste ili kolone je broj domina koje pokrivaju bar jedno polje te vrste ili kolone. Konfiguraciju table zvaćemo $balansirana$, ako postoji prirodan broj k takav da svaka vrsta i svaka kolona ima vrijednost k. Dokazati da balansirana konfiguracija postoji za svaki prirodan broj ($n \geq 3$) i odrediti minimalan broj domina potrebnih za tu konfiguraciju.

(Zadatak 3. 2017.)

Dato je 2017 pravih u ravni, tako da ne postoje tri koje prolaze kroz jednu istu tačku. Puž Turbo se nalazi u tački koja pripada tačno jednoj od pravih i započinje kretanje po ovim pravama na sljedeći način: on se kreće po pravoj dok ne stigne do tačke koja je presjek dvije prave, kada nastavlja svoj put po drugoj pravoj koja sadrži tu presječnu tačku(čini skretanje). Kada naiđe na novu presječnu tačku neke dvije prave, opet vrši skretanje itd. Skretanje vrši naizmjenično(npr. ako je kod prve tačke presjeka na koju je naišao skrenuo desno, kod druge na koju naiđe skrenuće lijevo, kod treće desno itd.). On može mijenjati smjer kretanja samo u tački presjeka dvije prave. Da li postoji dio neke prave, kojim on može proći u oba smjera tokom svog putovanja?

[6] Evropski matematički kup

(Zadatak 5. 2017.)

Neka je $n \geq 2$ cijeli broj. Za n -torku $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ne obavezno različitih pozitivnih cijelih brojeva kažemo da je interesantna, ako postoji pozitivan cijeli broj k takav da vrijedi: $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}$.

a) Naći sve cijele brojeve $n \geq 2$ za koje postoji interesantna n -torka.

b) Dokazati da za svaki neparan pozitivan cijeli broj m, postoji cijeli broj $n \geq 2$,

takav da m pripada nekoj interesantnoj n -torci.

Napomena: Na lijevoj strani jednakosti nalazi se tačno n faktora.

Interesantno je da je autor zadatka Harun Hindija, jedan od naših mentora.

EGMO je takmičenje čiji je cilj da podstakne djevojke da otkriju svoj potencijal u matematici i da razmisle o njoj kao svom životnom pozivu. Takmičenje je izazvalo kontraverzne reakcije. Mnogi vjeruju da se ovim takmičenjem samo doprinosi stigmatizaciji djevojaka da su manje talentovane i uspješne u matematici. Ta strana misli da bi vrijednije bilo promovisati takmičenja za oba pola npr. IMO i da bi se njima puno efikasnije stimulisale djevojke.

Druga strana vjeruje da je EGMO dobar način da se djevojke okušaju u matematičkim takmičenjima, zavole ih i dokažu prvenstveno sebi da ljudi koji su im govorili da ne mogu postići ništa u ovom polju, nisu bili u pravu. Jedan od razloga što se manje djevojaka takmiči u ovim oblastima je što većina djevojaka vjeruje da uspjeh u karijeri implicira uspjeh u više oblasti u isto vrijeme što im miče fokus na određenu oblast u kojoj bi mogle i željele briljirati. Ovo su iskustva određenog broja djevojaka ali NE impliciraju apsolutnu generalizaciju.

Broj djevojaka na takmičenjima do 8.razreda je otprilike isti kao broj dječaka, ali do kraja srednjoškolskog obrazovanja taj broj se drastično smanjuje. U analizi koju su sproveli matematičar Chad Topaz i Shilad Sen na 13.000 uredničkih pozicija u 435 matematičkih časopisa, otkriveno je da manje od 9% svih uredničkih mjesta iz matematičkih časopisa drže žene, jedan od deset časopisa uopće nema urednice.

Jedan od faktora koji tome doprinosi je ono što nazivaju "efektom briljantnosti": vjerovanja da prirodna briljantnost ili talent dovode do uspjeha, a ne naporan rad ili upornost. Ali, nažalost, žene se rijetko smatraju briljantnima. Najčešća implikacija je da, da biste bili matematičar, morate biti sjajni, a u našem društvu za žene se rijetko govori da su sjajne.Dalje, dostignuća matematičarki se često pripisuju njihovom polu.

Matematičarka Sarah Brodsky kaže da su joj, nakon što joj je dodeljeno prestižno priznanje Sveučilišta za postdiplomske studije Nacionalne naučne fondacije, kolege govorili da je osvojila nagradu samo zato što je ona žena. Upravo razmišljanje da su dostignuća žena u matematici posljedica toga što su žene, a ne njihovih sposobnosti ili napornog rada nimalo im ne pomaže da se izbore za važnije pozicije u svijetu matematike, kao što su uredničke pozicije najpoznatijih svjetskih časopisa.

Uredništva traže nekoga ko je zreo, ima stručnost i može pregledati članke i ukazivati na pravce koji rasvjetljavaju nedostatke u tuđem radu i oni žele biti sigurni da je ta osoba dobro kvalifikovana. Razlike u spolu mogu biti naročito izražene u matematici zbog toga što je to tradicionalno teren kojim brojčano dominiraju muškarci. Brodsky kad je upisala diplomski studij, bila je jedna od šest žena u grupi od 40 studenata. Bila je užasnuta kada je od jednog kolege saznala da su muške kolege redovno na svojim izlascima ocjenjivali njihove ženske kolege po izgledu. Nakon toga teško joj je bilo vidjeti sebe kao osobu koju ozbiljno shvataju na poslu, a ne kao temu za trač.

Status žene kroz historiju ostavlja svoje posljedice u današnjici. Žene se još uvijek bore da budu prihvaćene kao jednake u brojnim oblastima, a pogotovo u STEM područijima. BiH je jedna od država sa najviše djevojaka na IMO i trebamo biti primjer drugima da žene mogu biti uspješne u STEM oblastima. Djevojke ne smiju dopustiti da ih društvene norme natjeraju da propuste potencijalnu strast ili karijeru i ne smiju dopustiti da se njihova ljubav prema bilo čemu (u ovom slučaju matematici) ugasi zbog neuspjeha ili negativnih komentara. Žene mogu biti uspješne u matematici i to će svijetu i dokazati.

KOM' BI JE REKAO?

Sandro Paradžik je učenik III_1 razreda. Osvajač je 1. mjesta na Federalnom takmičenju 2019. godine. Ako čujete da Sandro priča o nečemu vjerovatno, priča o bijekcijama, a on će vas u ovom članku upoznati s tom temom.

Na početku bih da se zahvalim Admiru Bešireviću, mom mentoru i predavaču na Školi matematike za nadarene matematičare koju organizuje UMKS, koji je mene uveo u svijet bijekcija. Način na koji je on nama objasnio bijekcije bio mi je od velike pomoći u pisanju ovog članka.

Brojanje je jedna od najstarijih matematičkih aktivnosti ljudskog roda. Rješavajući razne probleme u matematici, ali i u mnogim drugim naukama potrebno je odgovoriti na pitanje koliko elemenata ima neki konačan skup? Enumerativna kombinatorika je dio kombinatorike u kojem se proučavaju metode i tehnike pomoću kojih se može odgovoriti na to pitanje.

U ovom članku ćemo napraviti uvod u neka naprednija prebrojavanja za koja ćemo koristiti rekurzivne funkcije i bijekcije. Ovaj članak je namijenjen srednjoškolcima koji su se već susretali sa barem nekim osnovnim prebrojavanjem. Sačinjen je od elemenata koji su mene inspirisali da matematici posvetim više vremena.

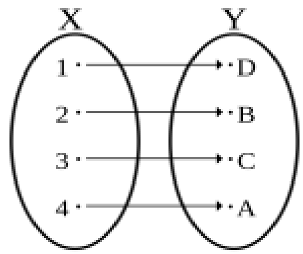
Definišimo pojam bijekcije. Bijekcija, ili jedan na jedan korespodencija, je funkcija koja je i injektivna i sirjektivna. Funkcija ima dvostrani inverz onda kada je bijekcija između svoje domene i kodomene. Ako između skupova X i Y postoji bijekcija, onda ti skupovi imaju jednak broj članova. Bijekcije su korisne u mnogo slučajeva. Konkretno, one se često koriste u kombinatorici kako bi prebrojali broj članova skupa čija je veličina nepoznata. Također su veoma korisne u teoriji skupova kada je riječ o beskonačnim skupovima ili permutacijama i vjerovatnoći. Uglavnom, dokaz koji uključuje bijekciju između skupova X i Y treba objasniti sljedeće:

1. Kako svakom elementu iz X pridružiti element iz Y;

2. Kako od svakog elementa iz Y generisati odgovarajući element iz X;

3. Zašto su oni inverzi jedan drugome.

Na slici 1 se može vidjeti primjer bijekcije.



Slika 1

Ideja je da uspostavimo bijekciju između onoga što prebrojavamo sa nečim što je lakše prebrojati. U suštini, da bismo znali da neka dva skupa imaju jednak broj elemenata ne moramo nužno znati brojati, dovoljno je da uspostavimo bijekciju. Nedavno sam naišao na svoju svesku iz matematike iz prvog razreda osnovne škole. Pogledao sam gradivo koje smo radili prije nego što smo uopšte učili brojeve. Na jednoj stranici sam imao nacrtan skup i u njemu nekoliko jabuka, pored njega su bili nacrtani kružići i svaki kružić je bio spojen sa tačno jednom jabukom i obrnuto.

Na ovaj način smo naučili šta zapravo znači broj elemenata nekog skupa da bi kasnije kada naučimo brojeve mogli pronaći taj broj. Pretpostavljam da je to jedna od prvih bijekcija sa kojim sam se susreo, isto vjerovatno važi i za većinu djece.

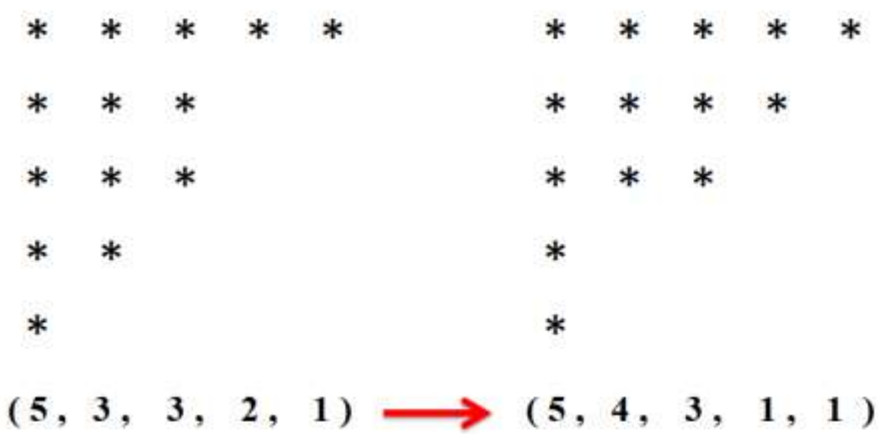
Zamislite da se nalazite na autobuskoj stanici čiji su peroni označeni brojevima od 1 do 40. Ako vas neko upita koliko ima autobusa na stanici, a vi primijetite da su svi peroni zauzeti, za tačan odgovor nije nužno da brojite autobuse. Ovo opažanje je suština principa bijekcije. Primjer 1.1. i 1.2. su među prvim zadacima ovakvog prebrojavanja koje sam vidio. Bez obzira na to što postoje i mnogo ljepše bijekcije ova dva primjera su u meni probudila interesovanje o ovoj temi.

Primjer 1.1. Izračunati broj rješenja jednačine $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ u skupu nenegativnih cijelih brojeva.

Rješenje: Posmatrajmo n jedinica, napisane kao 111...111 i postavljamo $k - 1$ pregrada. Na primjer 3 + 1 + 0 + 2 odgovara kombinacija 111|1||11, i svakom rješenju odgovara tačno jedno postavljanje pregrada i obratno (dakle imamo bijekciju), međutim broj načina postavljanja pregrada lako izračunamo, to je $\binom{n+k-1}{k-1}$, jer od $n + k - 1$ mjesta biramo $k - 1$ na koje ćemo postaviti pregrade (ili n na koje ćemo postaviti jedinice).

Primjer 1.2. Particija prirodnog broja je svako predstavljanje tog broja na sabirke koji su prirodni brojevi, pri čemu redoslijed nije bitan, na primjer broj 4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1 ima 5 particija (i 4 se računa kao particija). Dokazati da je za prirodan broj n broj particija broja n na manje ili jednako k sabiraka jednak broju particija na sabirke manje ili jednake k.

Rješenje: Predstavimo svaku particija preko zvjezdica, ako je dat broj n onda napišemo n zvjezdica u onoliko redova koliko particija ima sabiraka, pri čemu u svakom redu ima manje ili jednako zvjezdica nego u prethodnom (zbog ovoga je jedinstveno određeno postavljanje zvjezdica), recimo particija 2 + 2 se predstavlja tako sto se u prvi red stave 2 zvjezdice i u drugi dvije, particija 1 + 3 tako što se u prvi stave 3 zvjezdice a u drugi jedna. Posmatrajmo particije na manje ili jednako k sabiraka, svakoj toj particiji bijektivno dodijelimo particiju čiji je prvi red prva kolona ove particije, drugi red druga kolona itd. Na primjer, particiji 3 + 1 ćemo dodijeliti particiju 2 + 1 + 1. Dakle, uspostavili smo bijekciju između broja paticija broja n na manje ili jednako k sabiraka i broja particija broja n na sabirke manje ili jednake n, Q.E.D. Na slici 2 je prikazan primjer za bijektivno pridruživanje particiji 5 + 3 + 3 + 2 + 1.



Slika 2

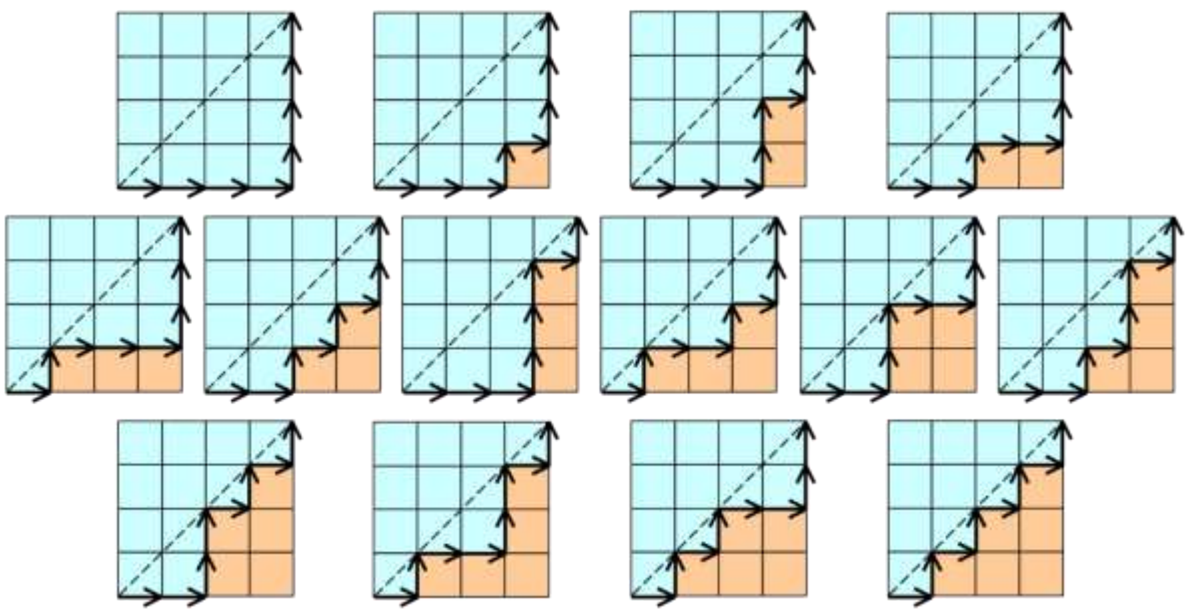
Iako na prvi pogled neki zadatak može djelovati kao da će imati neko ne baš lijepo rješenje, to ne mora značiti da ono zapravo nije i lijepo i jako jednostavno. Uspostavljanjem bijekcije problem svodimo na naizgled možda potpuno drugačiji problem. Primjer ovoga možemo vidjeti i na primjeru 1.3.

Primjer 1.3. Odredi broj načina da iz pozicije (0,0) u koordinatnom sistemu dođemo u poziciju (m,n) ukoliko su nam u svakom potezu dozvoljena pomjeranja za 1 udesno ili za 1 prema gore(iz pozicije (x, y) u jednom potezu možemo doći ili u $(x + 1, y)$ ili $(x, y + 1)$.

Rješenje: Primijetimo da nam je broj poteza potrebnih da dođemo u zadanu poziciju uvijek isti, i to je jednak broju $m+n$. Tačnije, napravit ćemo m poteza udesno i n prema gore. Naše kretanje zavisi samo od toga kada ćemo odlučiti da napravimo potez udesno(jer ćemo u suprotnom napraviti potez prema gore). Posmatrajmo niz slova G i D dužine $m+n$, te neka ima m slova D i n slova G. Uspostavimo bijekciju između skupa svih ovakvih nizova i skupa svih puteva koji nas vode od (0,0) do (m,n).

Nekom nizu pridružit ćemo put takav da za n-ti potez pravimo pomjeranje prema gore ukoliko je n-ti član tog niza G, u suprotnom pravimo pomjeranje udesno. Na sličan način ćemo svakom putu pridružiti neki niz, ako je n-ti potez potez prema gore, n-ti član niza će biti G. U suprotnom će n-ti član niza biti D. Očigledno svakom nizu odgovara tačno jedan put i obrnuto pa postoji bijekcija između ova dva skupa te oni imaju isti broj elemenata. Broj načina da postavimo m slova D u niz dužine $m+n$ je $\binom{m+n}{m}$, na ovaj način su određeni položaji i slova G pa postoji isto toliko prethodno definisanih nizova. Dakle, traženi broj je $\binom{m+n}{m}$.

Primjer 1.4. Neka je n prirodan broj. Odredi broj puteva da se dođe iz tačke (0,0) u tačku (n,n) koristeći isključivo korake gore i desno, tako da u toku cijelog puta za koordinate tačaka vrijedi x ≥ y. Na slici 3 nam jepokazan primjer puteva za n = 4.

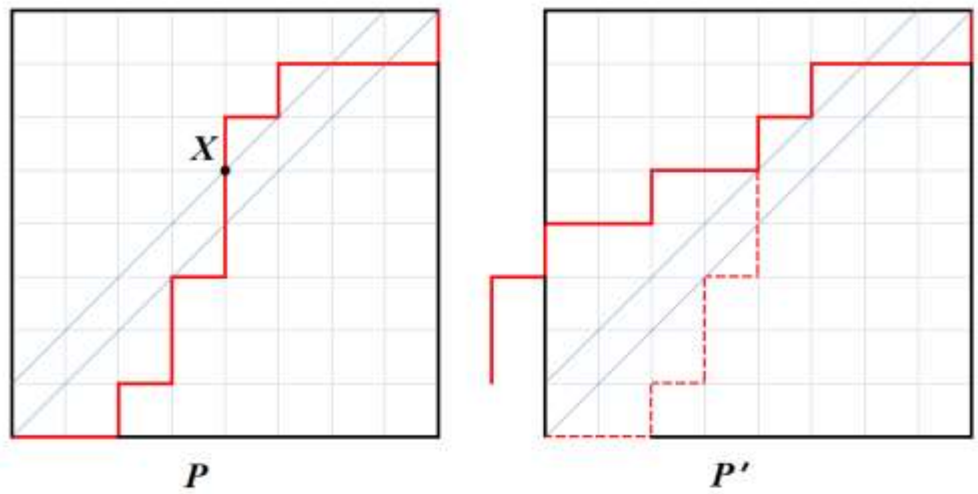


Slika 3

Rješenje: Prethodno smo vidjeli da je broj načina da se dođe iz (0,0) u (n,n) bez ograničenja $x \geq y$ jednak $\binom{2n}{n}$.

Prebrojimo broj puteva kori prolaze kroz $x < y$ regiju. Nazovimo ove puteve *lošim* putevima.

Pretpostavimo da je P *loš* put. Pošto P prolazi kroz $x < y$ regiju, mora pogoditi liniju $y = x + 1$ nekada od (0,0) do (n,n). Neka je X prva tačka na putu P koja se nalazi na liniji $y = x + 1$. Sada, preslikajmo dio puta P do tačke X preko linije y = x + 1, ostavljajući dio puta poslije tačke X istim. Neka je ovaj novi put P'.



Slika 4

Tvrdimo da nam ovo daje bijekciju između skupa *loših* puteva i skupa puteva od (-1,1) do (n,n) koristeći samo kretanja gore i desno.

Ovo je inverzna konstrukcija. Za bilo koji put Q iz (-1,1) do (n,n), neka je X prva tačka na putu koja leži na pravoj $y = x + 1$, i neka je Q' konstruirano iz Q tako što reflektujemo dio puta Q do tačke X preko prave $y = x + 1$ i ostavljajući ostatak puta istim.

Onda inverz ove bijekcije šalje Q u Q'.

Da završimo dokaz ove tvrdnje, moramo provjeriti nekoliko detalja, koje ističemo ispod. Čitatelj bi trebao razmisliti zašto su tvrdnje tačne.

1. Inverz konstrukcije je dobro definisan, tj. uvijek ćemo moći naći tačku X, i dobijeni Q' je uvijek *loš put*.
2. Ove dvije konstrukcije su inverzi jedna drugoj.

Broj *loših* puteva je jednak broju puteva od (-1,1) do (n,n), koristeći samo kretanje gore i desno, a takvih puteva ima $\binom{2n}{n+1}$ (koristeći zadatak 1). Dakle, broj „dobrih“ puteva, tj., onih koji ne idu kroz oblast x < y je jednak

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ovo je naš prvi primjer nečega što se broji uz pomoć Catalanovih brojeva.

n-ti Catalanov broj je

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Mnogo kombinatornih zadataka sa prebrojavanjem ima rješenje koje se svodi na Catalanove brojeve. Knjiga "Combinatorics: Volume 2" matematičara Richarda P. Stanleya sadrži skup vježbi koje opisuju 66 različitih interpretacija Katalanovih brojeva. U kombinatornoj matematici, Catalanovi brojevi su niz prirodnih brojeva koji se koriste u mnogim zadacima iz prebrojavanja, često uključujući i rekurzivno definisane predmete. Nazvani su po belgijskom matematičaru Charlsu Catalanu (1814 - 1894).

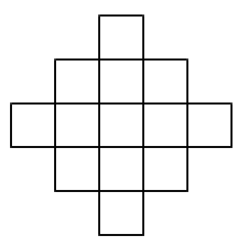
Nekada kada nam se čini da smo iscrpili sve ideje za zadatak jednostavno odustanemo. Često je najbolje da pogledamo problem iz drugog ugla (nekad i doslovno). Obratimo pažnju na primjere 1.5. i 1.6.

Primjer 1.5. Dokaži da je broj načina slaganja novčića u ravni, tako da se donji red sastoji od n novčića poredanih jedan uz drugi, n – ti Catalanov broj.

Za ovaj primjer priložena je uputa za rješenje, kompletno rješavanje ostavljeno je zainteresovanom čitaocu.

Uputa za rješenje: Ideja je da pokažemo bijekciju sa primjerom 1.4. Ako zarotiramo složene novčiće za 45° suprotno od smjera kazaljke na satu primijtit ćemo da je broj načina za slaganje novčića isti kao broj načina da u koordinatnom sistemu iz (0,0) koristeći kretanja kao u primjeru 1.4. i 1.3. i ostajući iznad dijagonale koja spaja tačke (0,0) i (n,n) dođemo u (n,n), zbog simetrije postoji bijekcija sa primjerom 1.4.

Primjer 1.6. Dijamant reda n je vertikalno simetričan skup jediničnih kvadrata koji u vrstama ima $1, 3, 5, \dots, 2n-3, 2n-1, 2n-3, \dots, 3, 1$ kvadrata redom (na slici 5 je dat primjer za $n = 3$). Figuru 2×1 (ili 1×2) zovemo dominom. Neka je $A(n,k)$ broj načina na koji može da se postavi k disjunktnih kvadrata 2×2 na ploču $(2n-1) \times (2n-1)$, a $B(n,k)$ broj načina na koji može da se postavi k disjunktnih domina na dijamant reda n. Simetrična postavljanja se smatraju različitim. Dokazati da je $A(n,k) < B(n,k)$ za $2 \le k \le (n-1)^2$.



Slika 5

Rješenje: Obojimo (2n – 1) × (2n – 1) tablu kao šahovsku ploču gdje su ugaona polja obojena crnom bojom. Svaki kvadrat 2 × 2 ima tačno dva dijagonalno spojena crna polja. Postoji bijekcija između crnih polja na (2n – 1) × (2n – 1) tabli i polja dijmant reda n pri čemu dijagonalno spojena crna polja odgovaraju poljima u dijamantu sa zajedničkom stranicom. Crna polja koje pokriva 2 × 2 kvadrat se slikaju u dominu na dijamantu i te domine se ne smiju preklapati, te svakom postavljanju 2 × 2 kvadrata na (2n – 1) × (2n – 1) tabli injektivno odgovara jedno postavljanje domina na dijamantu reda n. Obrnuto ne važi jer dvije domine koje formiraju 2×2 kvadrat se slikaju u dva 2×2 kvadrata sa zajedničkim bijelim poljem. Lako je za svako $(n - 1)^2 \geq k \geq 2$ konstruisati polapanje u kome ovo postoji te stoga važi stroga nejednakost (za $k > (n - 1)^2$ nije uopšte moguće izvršiti postavljanja).

Često poznavanje bijekcija nije dovoljno kako bi riješili neki problem enumerativne kombinatorike. Rekurzije nam često mogu biti od pomoći. U ovom dijelu članka čitaoc će imati priliku da se upozna sa nekim osnovama rješavanja problema koristeći rekurzivne funkcije. Za početak definišimo rekurziju.

Rekurzija je metoda definisanja nečega (uglavnom niza ili funkcije) koristeći prethodno definisanih vrijednosti. Najpoznatiji primjer rekurzivne funkcije je Fibonačijev niz. Ako je F_n n-ti Fibonačijev broj, niz je rekurzivno definisan relacijama $F_0 = F_1$ i $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Odnosno, svaki član niza je jednak sumi dva prethodna. Lako računamo prvih nekoliko članova niza:

$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, \ldots$

Uglavnom je dobro rekurzivno definisanu funkciju definisati na drugi način, tj. zatvoreno.

Na primjer, niz rekurzivno definisan sa $a_0 = 1$ i $a_n = 2a_{n-1}$ za $n > 0$ možemo definisati sa relacijom $a_n = 2^n$.

Primjer 2.1. je primjer na kojem možemo steći osjećaj o ovoj temi.

Primjer 2.1. U ravni se nalazi n pravih. Među njima nema paralelnih i nikoje tri prave se ne sijeku u istoj tački. Na koliko dijelova (regiona) tih n pravih dijeli ravan?

Rješenje: Pretpostavimo da se u ravni nalazi n pravih za koje vrijede pretpostavke iz zadatka. Neka je a_n broj dijelova na koje je ravan podijeljena tim pravama. Sada dodajmo novu pravu tako da i dalje vrijede pretpostavke. Nova prava siječe sve već postojeće prave (nema paralelnih!) u n različitih tačaka $A_1, A_2, .., A_n$ (nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku). Tih n tačaka dijele tu novu pravu na $n + 1$ dio (segment ili polupravu). Svaki od tih dijelova nove prave siječe jedan od već postojećih a_n dijelova ravni na dva nova. Dakle, dodavanjem nove prave nastane $n + 1$ novi region na koje je podijeljena ravan. Dakle, vrijedi $a_{n+1} = a_n + n + 1$. Kako je $a_1 = 2$, uz malo računanja dobijemo da je traženi broj dijelova na koje je ravan podijeljena jednak $a_n = (n^2 + n + 2):2$.

Primjer 2.2. Koliko ima nizova dužine n napisanih ciframa 0, 1 i 2 u kojima je broj upotrijebljenih nula neparan?

Rješenje: Neka je A_n skup svih traženih nizova dužine n i neka je a_n broj članova tok skupa. Ako u svim nizovima iz A_n koji završavaju sa 1 ili 2 obrišemo posljednju cifru, dobit ćemo nizove dužine $n - 1$ sa neparnim brojem nula, to jeste, tako dobijeni nizovi su iz A_{n-1}. Stoga, nizova u A_n kojima je posljednja cifra 1 ili 2 ima $2a_{n-1}$. Ako niz iz A_n završava sa nulom, brisanjem te posljednje nule nastat će niz dužine $n - 1$ koji ima paran broj nula, to jest, ovako dobijeni niz iz $\{0, 1, 2\}^{n-1}$ nije u A_{n-1}. Svih nizova dužine

$n - 1$ u skupu $\{0, 1, 2\}$ ima 3^{n-1}, pa je broj nizova sa parnim brojem nula jednak $3^{n-1} - a_{n-1}$. Primjenimo li princip sume, dobit ćemo da je :
$a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1} - a_{n-1} = a_{n-1} + 3^{n-1}$. Ovu rekurzivnu relaciju nije teško riješiti. Kako je $a_1 = 1$, ako ovu rekurzivnu relaciju primjenimo $n - 1$ put dobit ćemo da je
$a_n = 1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = (3^n - 1) : 2$.

Primjer 2.3. Koliko nizova dužine n se može napraviti od cifara iz skupa {0, 1, 2, 3, 4} tako da se svake dvije susjedne cifre u nizu razlikuju za jedan?

Rješenje: Neka je X_n skup svih traženih nizova dužine n i neka je x_n broj elemenata ovog skupa. Podijelimo skup X_n u tri dijela:

1. skup nizova iz X_n koji završavaju sa 0 ili sa 4 označimo sa A_n;
2. skup nizova iz X_n koji završavaju sa 1 ili sa 3 označimo sa B_n;
3. skup nizova iz X_n koji završavaju sa 2 označimo sa C_n.

Broj elemenata skupa A_n označimo sa a_n, broj elemenata skupa B_n sa b_n a skupa C_n sa c_n.
Dakle:

1. Ako se niz iz X_n završava ciframa 0 ili 4, tada je pretposljednji broj u tom nizu 1 (odnosno 3). Zato je $a_n = b_{n-1}$.
2. Ako se niz iz X_n završava cifrom 1 tada je pretposljednji broj u tom nizu 0 ili 2. Ako niz iz X_n završava cifrom 3, pretposljednji broj u nizu je 2 ili 4. Zato je $b_n = a_{n-1} + 2c_{n-1}$.
3. Ako se niz iz X_n završava cifrom 2, pretposljednji broj u nizu je 1 ili 3. Stoga je $c_n = b_{n-1}$.

Odavde je $b_n = a_n + 2c_{n-1} = 3b_{n-2}$. Kako je $b_1 = 2$ a $b_2 = 4$, to je $b_{2n} = 3^{n-1} \cdot 4$ i $b_{2n+1} = 3^n \cdot 2$. Sada je $x_n = a_n + b_n + c_n = 2 \cdot b_{n-1} + b_n$. Odnosno, za $n = 2k + 1$ vrijedi $x_n = 14 \cdot 3^{k-1}$, a za $n = 2k$ vrijedi $x_n = 8 \cdot 3^{k-1}$.

Ukratko ćemo reći nešto i o takozvanoj metodi *podijeli pa vladaj*. Ova metoda je posebna algoritamska tehnika u kojoj se ulaz razbija na nekoliko dijelova, te se potom problemi u svakom dijelu rješavaju rekurzivno, a zatim se kombiniraju rješenja ovih manjih problema u konačno rješenje. U većini slučajeva ovo je vrlo jednostavna, ali moćna metoda. Ona svojim konceptima znatno olakšava rješavanje kao i shvaćanje mnogih problema. Metoda podijeli pa vladaj temelj je efikasnog algoritma za sve vrste problema, kao što su sortiranje (Quick Sort, sortiranje spajanjem), množenje velikih brojeva (npr. Karatsuba), Fourierove transformacije, itd. Jedna od prvih primjena ove izuzetno moćne metode bilo je binarno pretraživanje. Opis tog algoritma na računarima prvi se put pojavio 1946. godine u članku Johna Mauchlyja, američkog fizičara koji je dizajnirao ENIAC. U tom je članku opisao ideju kojom bi se koristeći već sortirani niz elemenata znatno olakšalo pretraživanje. Primjena ove metode seže još mnogo dalje u prošlost - nekoliko stoljeća p.n.e, Euklidov algoritam za računanje najvećeg zajedničkog djelioca dva broja koristio je ovu metodu. Jedan od značajnijih primjera jest algoritam koji je izumio Anatolii A. Karatsuba, ruski matematičar 1962. godine, a koji služi za množenje dva n-tocifrena broja u ekonomiji.
Za kraj ćemo završiti jednim zanimljivim citatom:

*"Not everything that can be counted counts.
Not everything that counts can be counted."*

- William Bruce Cameron

ZADACI ZA SAMOSTALAN RAD:

1. Skup S nazivamo „lijepim" ako zadovoljava sljedeće uslove:
    a) S sadrži tačno 4 elementa
    b) Za svaki element x iz S, barem jedan od brojeva $x - 1$ ili $x + 1$ pripada skupu S.

   Odredi broj svih lijepih podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.
2. Neka je $n \geq 1$ prirodan broj. Kvadrat dužine n je podijeljen pravima paralelnim sa stranicama tog kvadrata na n^2 kvadratića čije su stranice dužina 1. Odredi broj paralelograma čije se stranice sastoje od stranica jediničnih kvadratića i takvih da su im obje stranice ≤ 2, i čija je površina jednaka 2.
3. Na koliko načina je moguće popločati ploču $2 \times n$ dominama 1×2 i 2×1?
4. Na koliko načina možemo rasporediti n otvorenih i n zatvorenih zagrada u niz tako da savaka otvorena zagrada ima svoju odgovarajuću zatvorenu zagradu koja se nalazi desno od nje?
5. Neka je n prirodan broj. Koliko ima permutacija $a_1, a_2, \ldots, a_n$ brojeva $1, 2, \ldots, n$ takvih da za tačno jedan indeks i ($i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) vrijedi $a_i > a_{i+1}$?
6. Jednakostranični trougao stranice n podijeljen je pravima (od kojih je svaka paralelna jednoj od stranica) na n^2 jednakostraničnih trouglova stranice 1. Koliko paralelograma obrazuju ove prave?
7. Dat je niz sa n članova tako da su oni ili 0 ili 1, i takav niz je binarni niz dužine n. Neka je a_n broj binarnih nizova dužine n takvih da NE sadrže 3 uzastopna člana: 0, 1, 0; u ovom redoslijedu. Neka je b_n broj binarnih nizova dužine n takvih da nikoja 4 uzastopna člana NISU jednaka: 0, 0, 1, 1 ili 1, 1, 0, 0; u ovom redoslijedu. Dokaži da je $b_{n+1} = 2a_n$ za svaki prirodan broj n.
8. Za prirodne brojeve a, b označimo sa f(a, b) broj uređenih a – torki cijelih brojeva čiji je zbir apsolutnih vrijednosti manji ili jednak b. Dokazati da je f(a, b) = f(b, a).

LITERATURA:

1. „Elementi enumerativne kombinatorike", Duško Jojić, Naša knjiga, godina izdanja 2011.
2. https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Bijection, pristupljeno 11.2.2020.
3. http://yufeizhao.com/olympiad/bijections.pdf
4. „Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji", Materijali za mlade matematičare, Sveska 49, Vladimir Baltić, Đorđe Krtinić, Dušan Đukić, Ivan Matić
5. https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Recursion, pristupljeno 11.2.2020.

6. http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/ORE02.pdf

Napominjem da je u prevodu nekih materijala učestvovao i Haris Imamović, učenik drugog razreda Druge gimnazije, te mu se zahvaljujem na tome.

RAZNE GEOMETRIJSKE LEME IZ TAKMIČARSKE MATEMATIKE

Ervin Macić je učenik I_1 razreda. Osvajač je bronzane medalje na JBMO 2019, pobjednik ljetnog kampa u naprednoj grupi 2019. Ervinova specijalnost je geometrija i odlučio vas je upoznati s nekim lemama koje mogu biti korisne u zadacima. Imajte u vidu da su ove leme većinom korisne u ozbiljnijim zadacima, nivoa federalnog i teže.

U ovom članku upoznat ćemo se sa nekim lemama u vezi sa slijedećim pojmovima:

1. Preslikavanja ortocentra
2. Ojlerova kružnica i Ojlerova prava
3. Presjek simetrale ugla i simetrale stranice
4. Upisana i pripisana kružnica („Trozubac“)
5. Simsonova prava

1. Preslikavanja ortocentra

a) **Za dati ΔABC sa ortocentrom H i D podnožjem visine iz A na BC. Neka je X tačka simetrična ortocentru u odnosu na D. Vrijedi da X pripada opisanoj kružnici trougla ABC.**

<u>Dokaz:</u> Imamo da je D sredina duži HX i BD okomito na HX. Ovo povlači da je trougao XBH jednakokraki ($BH = BX$).
Odavde slijedi $\sphericalangle XBC = \sphericalangle CBH = \sphericalangle XAC = 90^\circ - \sphericalangle ACB$ a ovo povlači da je četverougao $ABXC$ tetivan.

b) **Neka je dat trougao ABC sa ortocentrom H. Ako je M sredina stranice BC i Y tačka simetrična ortocentru u odnosu na M onda Y pripada opisanoj kružnici trougla ABC. Pored toga vrijedi da je Y dijametralno suprotna tačka tački A na opisanoj kružnici oko trougla ABC.**

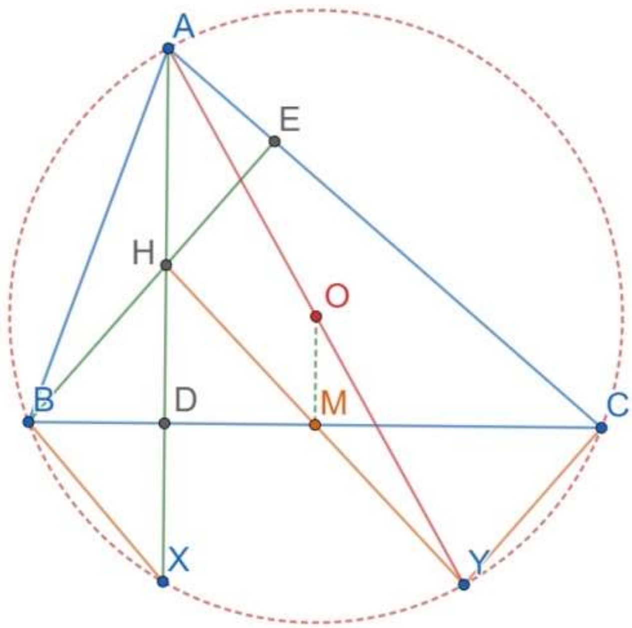
<u>Dokaz:</u> Očito četverougao $BHCY$ je paralelogram (paralelogram je četverougao čije se dijagonale polove, što očito ovdje vrijedi za $BHCY$). Imamo da je BY paralelno sa CH, pa je BY okomito na AB odakle je $\sphericalangle YBA = 90°$. Na isti način zaključujemo da je $\sphericalangle YCA = 90°$, pa je $ABYC$ tetivni, a vidimo da je AY prečnik te kružnice.

Također treba naglasiti još jednu posljedicu ove lemme.

c) **Udaljenosti vrha trougla od ortocentra je duplo veća od udaljenosti sredine nasuprotne stranice od centra opisane kružnice trougla.**

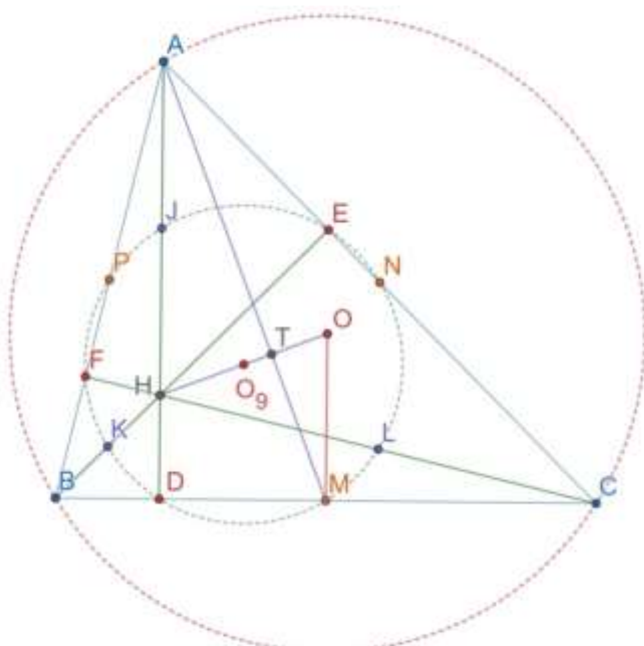
($AH = 2OM$ prema slici ispod)

<u>Dokaz:</u> Sada uočimo da je O sredina duži AY (jer je AY prečnik) i M sredina duži HY što znači da je OM srednja linija trougla AYH što povlači da je $AH = 2OM$.



2. Ojlerova kružnica i Ojlerova prava

Ojlerova kružnica (kružnica devet tačaka) je kružnica jedinstvena za sve trouglove, koja prolazi kroz podnožja visina iz tjemena, sredine stranica trougla i sredine duži



AH, BH, CH.

Dokaz da su ovih 9 tačaka konciklične (tj. da pripadaju jednoj kružnici) je popriličnno lagan i ostavljamo ga čitaocima da ga sami probaju dokazati.

Također vrijedi da su ortocentar, težište i centar opisane jednog trougla kolinearne tačke i to vrijedi $HT = 2OT$.

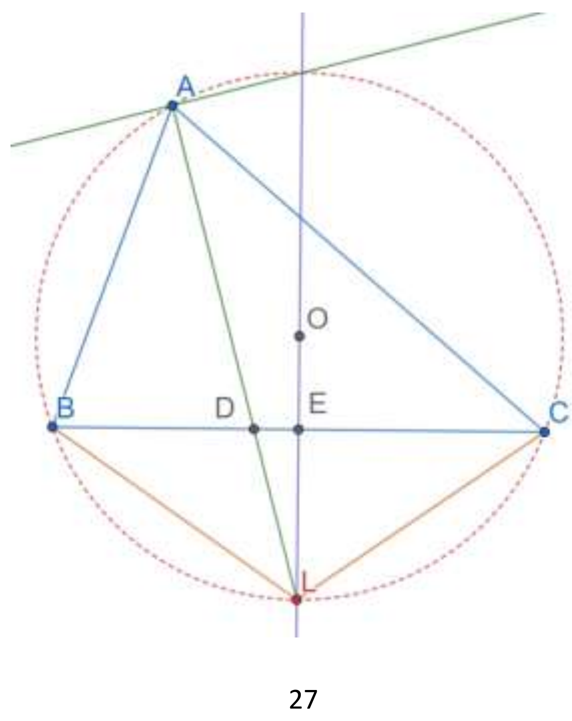
Dokaz: Uočimo na slici gore da je $AH = 2OM$ uz pomoć lemme 2. c). Također AH je paralelno sa OM. Pretpostavimo da tačka T nije težište. Tj. Uzmimo T da je presjek OH i AM. Imamo $\sphericalangle OMT = \sphericalangle TAH$ iz paralelnosti i $\sphericalangle ATH = \sphericalangle OTM$ što znači da trouglovi MTO i AHT imaju iste uglove, tj. oni su slični i to sa koeficijentom 2 jer $AH = 2OM$. To znači da je $\frac{AT}{TM} = 2$. Sjetimo se da je se težište može definisati kao tačka na težišnici čija je udaljenost od vrha dvostruka od te udaljenosti od podnožja težišnice, tj. sredine nasuprotne stranice. Ovo znači da naš presjek uistinu jeste težište. (prava koja sadrži ortocentar, težište i centar opisane se još naziva Ojlerovom pravom).

Odmaknimo se sada od ortocentra..

3. Presjek simetrale ugla i simetrale stranice

Tvrdnja: Presjek simetrale ugla i simetrale stranice nasprem tog ugla pripada opisanoj kružnici tog trougla.

Dokaz: Neka simetrala ugla $\sphericalangle BAC$ siječe opisanu kružnicu u L. $\sphericalangle LAB = \sphericalangle LAC$ što povlači $BL = CL$ (uglovi nad istim tetivama) tj. L pripada simetrali stranice BC jer je trougao BLC jednakokraki.



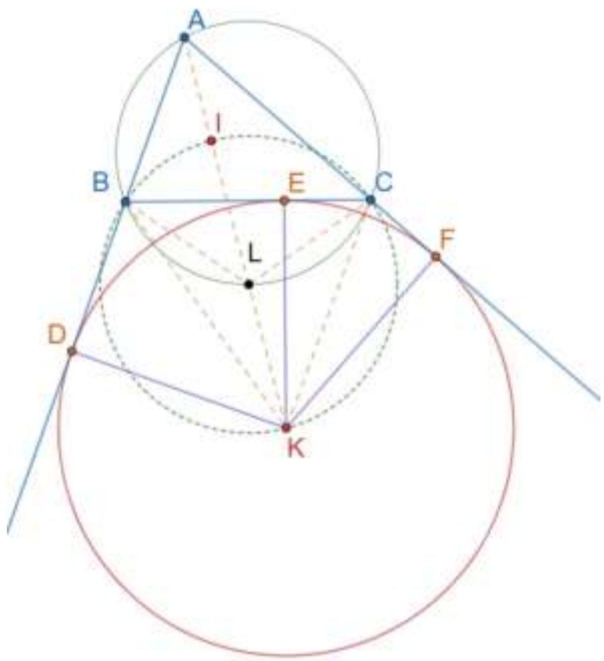
Također odavde je očito da je L sredina luka BC bez tačke A.

4. Upisana i pripisana kružnica („Trozubac“)

Tvrdnja: $BL = LI = CL$ gdje je I centar upisane trougla ABC.

Dokaz: Iz leme 4. Imamo $BL = CL$. Sada je dovoljno pokazati da je $IL = BL$.

$\sphericalangle IBL = \sphericalangle IBC + \sphericalangle CBL = \frac{\sphericalangle ABC}{2} + \sphericalangle CAL = \frac{(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC)}{2} = \sphericalangle BIL$, što se trebalo dokazati ($\sphericalangle BIL$ je vanjski u trougli ABI).



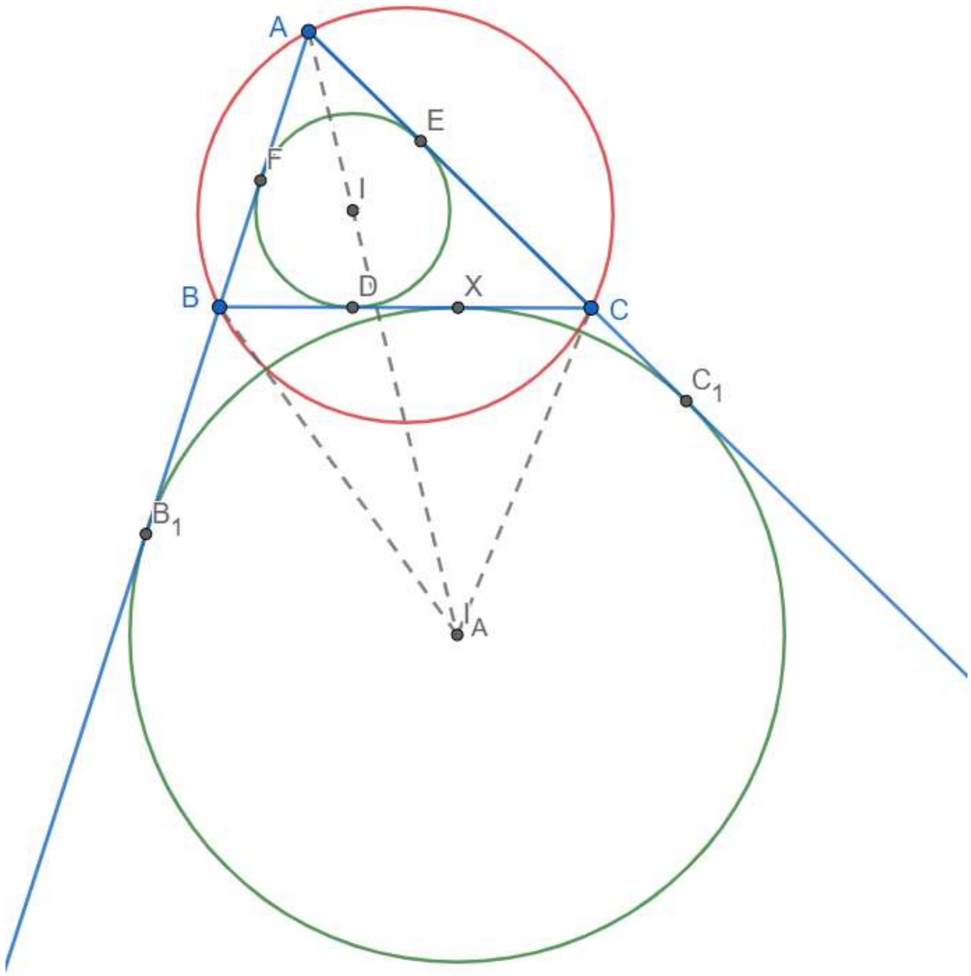
Sada preslikajmo I preko L u neku tačku K . Ta tačka čini dva pravougla trougla sa vrhovima B i C i sredinama hipotenuza L.

Računajmo uglove: $\sphericalangle ICK = 90^{\circ} = \sphericalangle ICB + \sphericalangle BCK$ odavde slijedi da su CK analogno i BK vanjske simetrale uglova kod $B\ i\ C$. Ovo nam pokazuje da se vanjske simetrale uglova kod $B\ i\ C$ sijeku na unutrašnjoj simetrali ugla kod vrha A. Ovo vrijedi analogno za ostala dva vrha.

Sada povucimo prave okomite iz K na produžetke stranica $AB\ i\ AC$. Neka su ta podnožja $D\ i\ F$ redom.

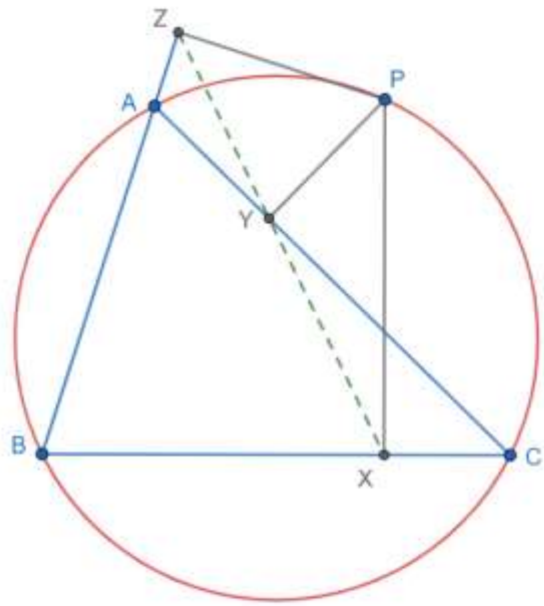
Neka je E podnožje visine iz K na BC. Imamo da su trouglovi EKC i KFC podudarni odakle slijedi $EK = KF$ analogno i $EK = KD$. Ovo povlači da postoji kružnica kroz tačke D, E, F koja je tangentna na stranice $AB, BC\ i\ CA$ sa centrom K. Ova kružnica se naziva pripisanom kružnicom trougla.

Za razliku od Ojlerove ili upisane kružnice, ona nije jedinstvena za svaki trougao. Postoje tri pripisane kružnice za svaki trougao. Na slici ispod je prikazana pripisana kružnica nasprem vrha A.



5. Simsonov pravac

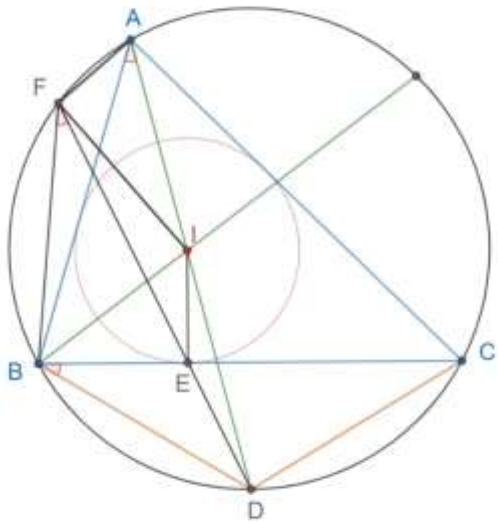
Tvrdnja: Za bilo koju tačku na opisanoj kružnici nekog trougla ABC, podnožja visina iz te tačke na stranice trougla su kolinearne tačke.



<u>Dokaz:</u> Primijetimo tetivne četverouglove $PYXC$ i $PYAZ$. Vrijedi, $\measuredangle CYX = \measuredangle XPC = 90^\circ - \measuredangle XCP = 90^\circ - \measuredangle PAZ = 90^\circ - \measuredangle PYZ = \measuredangle AYZ$ dobili smo $\measuredangle AYZ = \measuredangle CYX$,što znači da su tačke X, Y, Z kolinearne.

A sada ćemo vidjeti zadatke koji koriste navedene lemme:

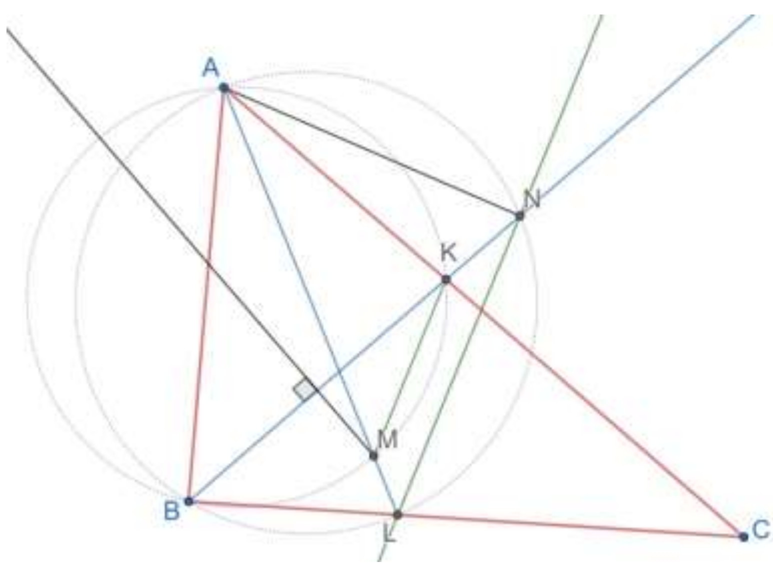
1. (Federalno takmičenje za 2. srednje) Neka je dat trougao ABC sa centrom upisane kružnice u tački I. Prava AI siječe kružnicu k opisanu oko trougla ABC u tačkama A i D. Kružnica upisana u trougao ABC dodiruje stranicu BC trougla u tački E. Prava DE siječe kružnicu k u tačkama D i F. Dokazati da je $\measuredangle AFI = 90°$.
   <u>Rješenje:</u>
   Imamo da je $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle CAD = \measuredangle CBD$ to znači $BD = CD$ **(1)** jer su to tetive kružnice k sa jednakim periferijskim uglovima. Također je: $\measuredangle EBD = \measuredangle CBD = \measuredangle CAD = \measuredangle BAD = \measuredangle BFD = \measuredangle BFE$ (2) i $\measuredangle BDE = \measuredangle BDF$ **(3)**. Iz **(2)** i **(3)** slijedi: $\Delta BDE \sim \Delta FDB$ **(4)** Iz **(4)** slijedi: $DB^2 = DE \cdot DF$ **(5)** Na osnovu Leme 4. imamo da je $DB = DI = DC$ **(6)** Sada iz **(5)** i **(6)** slijedi $DI^2 = DE \cdot DF$ **(7)** Dalje, pošto je $\measuredangle IDE = \measuredangle IDF$ **(8)**. Iz **(7)** i **(8)** sada slijedi $\Delta IDE \sim \Delta DFI$ **(9)**, a iz **(9)** slijedi $\measuredangle DIE = \measuredangle DFI$ **(10)** $AFDC$ je tetivan četverougao, pa je **(11)**: $\measuredangle AFD + \measuredangle DCA = 180°$. $\measuredangle IFD = \measuredangle DIE = 180° - \measuredangle BAD - \measuredangle CBA = \frac{\beta - \gamma}{2}$ imamo $\measuredangle ACD = \measuredangle ACB + \measuredangle BCD = \gamma + \frac{\alpha}{2}$ sada imamo iz (11) $\measuredangle IFD + \measuredangle AFI = 180° - \measuredangle ACD$ što je ekivalentno sa $\measuredangle AFI = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90°$, što je trebalo dokazati.



2. (JBMO 2010.) Dat je trougao ABC i simetrale unutrašnjih uglova su AL i BK (L i K pripadaju stranicama BC i AC redom). Tačka M je presjek simetrale duži BK sa AL. N je tačka na pravoj BK tako da vrijedi LN paralelno sa MK. Dokaži da vrijedi $LN = NA$.

Rješenje:

Uz pomoć **Leme 3**. prepoznajemo da je M sredina luka opisane kružnice trougla ABK. Ovo implicira $\sphericalangle BKM = \sphericalangle BAM$ a iz paralelnosti i $\sphericalangle BKM = \sphericalangle BNL = \sphericalangle BAM = \sphericalangle LAB$ što znači da je četverougao $ABLN$ tetivan. Ako je tvrdnja zadatka tačna slijedi da je N sredina luka AL što bi značilo BN je simetrala $\sphericalangle LBA$, a to vrijedi.



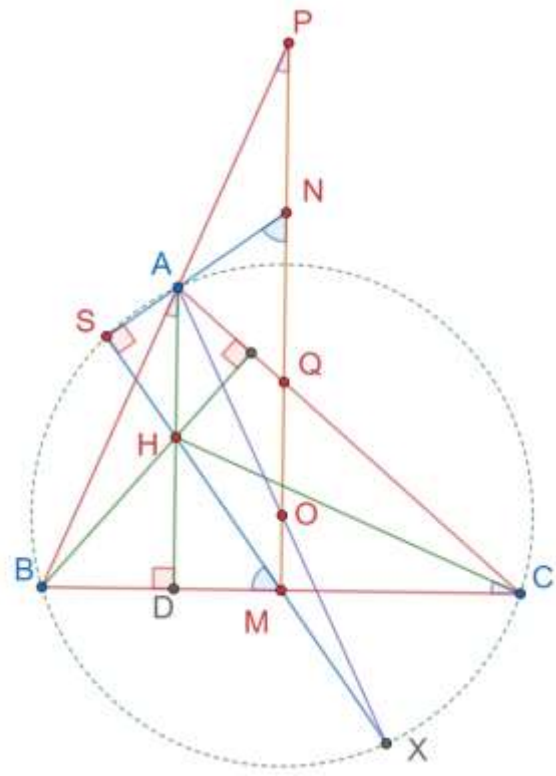
3. (JBMO 2019.) Dat je trougao ABC u kojem vrijedi $AB < AC$. Simetrala stranice BC siječe prave AB i AC u P i Q redom. Neka je H ortocentar trougla ABC. Ako su M i N sredine duži BC i PQ redom, dokazati da se polupravе MH i NA sijeku na opisanoj kružnici trougla ABC.

Rješenje:

Označimo presjek tih polupravih tačkom S. Uočimo da su prave PQ i AH obje okomite na stranicu BC što znači da su one paralelne međusobno. Odatle slijedi $\sphericalangle HCB = \sphericalangle BAH = \sphericalangle BPM = \sphericalangle APQ$ i imamo $\sphericalangle CMQ = \sphericalangle CBH = 90° - \sphericalangle ACB = \sphericalangle AQP$ ovo znači da su trouglovi APQ i HCB slični.

To povlači niz jednakosti: $\frac{AQ}{PQ} = \frac{BH}{BC} = \frac{AQ}{2QN} = \frac{BH}{2BM}$ što znači $\frac{AQ}{QN} = \frac{BH}{BM}$ i imamo $\sphericalangle AQN = \sphericalangle HBM$ što dodatno povlači $\Delta AQN \sim \Delta HBM$ analogno i $\Delta ANP \sim \Delta HMC$.

Sada posmatrajmo uglove: $\sphericalangle SAH = \sphericalangle SNQ = \sphericalangle ANQ = \sphericalangle BMH$ ovo znači da je četverougao $SAMD$ tetivan tj. AS je okomito na HM. Sada prema **Lemi 1**. ako produžimo polupravu HM do kružnice onda znamo da je taj presjek tačka dijametralno suprotna tački A što znači da drugi presjek poluprave MH sa opisanom kružnicom mora biti tjeme perifernog ugla nad prečnikom tj. S pripada opisanoj kružnici trougla ABC

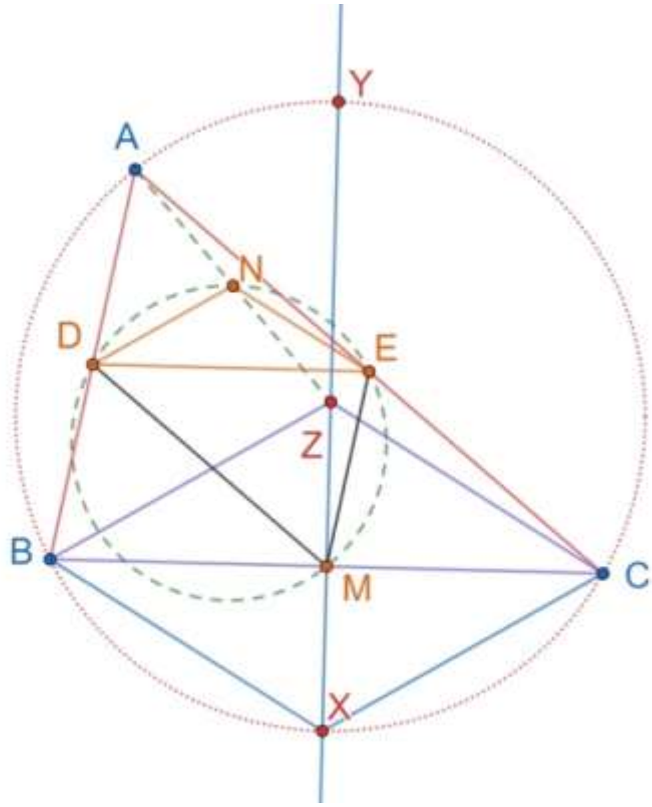


4. Neka je O centar opisane kružnice trougla ABC i neka je XY prečnik te kružnice okomit na BC, i siječe BC u M. Tačka X je bliža M nego Y i Z je tačka takva da leži na MY i $MZ = MX$. Dokazati da sredina duži AZ pripada Ojlerovoj kružnici trougla ABC.

<u>Rješenje:</u>

Uočimo da je XY ništa više nego simetrala stranice BC. To znači da je M sredina stranice BC. Tačka Z leži na toj simetrali stranice što znači da je jednako udaljena od B i C tj. $BZ = CZ$. Kako imamo da je Z tačka simetrična sredini BC povlači da je četverougao $BXCZ$ romb (jer $BZ = CZ$). Ovo znači $\sphericalangle BZC = \sphericalangle BXC$ (1).

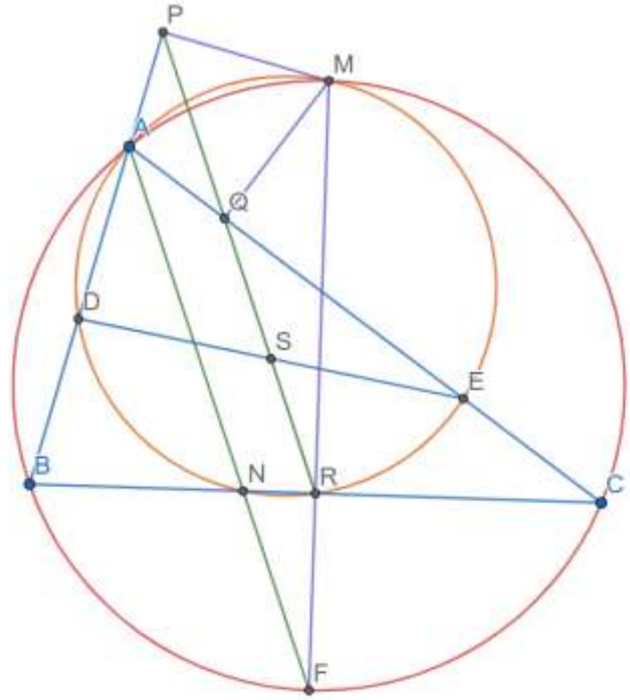
Sada moramo nekako iskoristiti „usamljenu“ sredinu AZ. Neka je ona N. Neka su D i E sredine AB i AC (hoćemo da pokažemo da N pripada opisanoj kružnici trougla DEM jer je to Ojlerova prema **Lemi 2.**). Sada uočimo da su $DN, NE\ i\ DE$ srednje linije trouglova ABZ , $ACZ\ i\ ABC$ redom. Kako imamo da su sve tri stranice trouglova DNE i BZC međusobno paralelne to slijedi oni su međusobno slični. $\sphericalangle DNE = \sphericalangle BZC = \sphericalangle BXC = 180° - \sphericalangle BAC$ zbog (1) $\sphericalangle DNE = 180° - \sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle DME$ ($\sphericalangle DME = 180° - \sphericalangle BMD - \sphericalangle CME = 180° - \sphericalangle ACB - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$) što znači da su uglovi DNE i DME suplementni tj. N pripada Ojlerovoj kružnici trougla ABC.



5. Neka je M sredina luka BC opisane kružnice oštrouglog raznostraničnog trougla ABC na kojem se nalazi i tačka A. Neka je N podnožje simetrale ugla kod vrha A na BC. Kružnica opisana oko trougla AMN siječe stranice AB i AC redom u D i E. Prava koja prolazi kroz sredine duži BC i DE siječe AB i AC u P i Q. Dokazati da je $MP = MQ$.

<u>Rješenje</u> (originalno rješenje učenika Ervina Macića i Naide Purišević):

Neka su sredine duži DE i BC tačke S i R. Prvo ćemo dokazati pomoćnu lemu: Za dati trougao ABC i sredinom luka BC sa tačkom A; M. Podnožja visina iz M na AB, AC i CB neka su $P"$, $Q"$ i $R"$. Dakle, sredina BC (to je $R"$) i $P"$ i $Q"$ su kolinearne (Simsonov pravac). (1)



Imamo $\Delta AP"M \cong \Delta AQ"M$ jer AM je vanjska simetrala ugla kod vrha A i $\sphericalangle MP"A = \sphericalangle MQ"A = 90°$. Ovo povlači $MP" = MQ"$. Sada je dovoljno dokazati da su $P"$ i $Q"$ tačke P i Q iz zadatka. Dakle, dovoljno nam je da vrijedi da $P"Q"$ prolazi kroz sredine stranica DE i BC. Ako primijenimo pomoćnu lemu (1) na trouglove ΔADE i ΔABC zaključujemo da $P"Q"$ prolazi kroz S i R. Sada je $P" = P$ i $Q" = Q$,

pa je $MP = MQ$, što je trebalo dokazati.

TURNIR GRADOVA

Imana Alibašić je učenica II_1 razreda. Imana je osvajačica srebrne medalje na Juniorskoj matematičkoj olimpijadi BiH 2018, bronzane medalje na Juniorskoj matematičkoj olimpijadi BiH 2017, njena specijalnost su nestandardni zadaci. Upravo joj je to omogućilo da se plasira na EGMO 2020, na takmičenju je uradila 2 kombinatorna i nestandarna zadatka. U matematičkim krugovima takmičenje koje je sinonim za nestandardne i lijepe zadatke je Turnir gradova. Ona će nas u ovom članku upoznati sa Turnirom…

Turnir gradova je međunarodno matematičko takmičenje nastalo 1979. godine u Rusiji. Osnivač je poznati ruski matematičar Nikolay Konstaninov, koji je i sam u prošlosti bio takmičar. Nisu mu se sviđali određeni aspekti takmičenja, naročito Internacionalne matematičke olimpijade, stoga je odlučio sam pokrenuti takmičenje koje će se u mnogome razlikovati od ostalih. Zadaci na Turniru gradova su uglavnom iz oblasti kombinatorike i geometrije. Većina nije tehnički zahtjeva i ne traži pretjerano poznavanje teorije, već samo inovativnu ideju. Zbog toga su učenicima ovakvi zadaci jako zanimljivi, ali i korisni za razvijanje slobode u razmišljanju. Takmičenje se održava dva puta godišnje, u jesen i u proljeće. Takmičari od sedmog razreda osnovne do prvog razreda srednje škole se takmiče u kategoriji juniora, a stariji srednjoškolci u kategoriji seniora. Obje kategorije su podijeljene na A-level i O-level, gdje su A-level zadaci teži. O-level test se radi 4 sata, a A-level 5 sati. Sistem bodovanja je prilično neobičan. Na testu se nalazi 5-8 zadataka, ali se boduju samo 3 najbolje urađena zadatka. Finalni rezultat učenika je broj bodova na najbolje urađenom testu te godine. Ukupan rezultat grada se računa tako što se uzme prosjek najboljih N učenika koji su učestvovali, gdje je N×100 000 ukupan broj stanovnika tog grada. Danas na Turniru gradova učestvuje preko 150 gradova iz različitih zemalja. Učešće na ovom takmičenju mogu uzeti svi gradovi koji to žele. Učenici rade testove iz vlastitih gradova, tako da nema nikakvih troškova.

Smatram da je Turnir gradova jedno izuzetno kvalitetno i unikatno takmičenje, te se nadam da će profesori i takmičari iz BH gradova u bliskoj budućnosti pokrenuti ovo takmičenje i kod nas.

U nastavku su izdvojeni neki zadaci koji su se prethodnih godina našli na Turniru gradova.

Zadaci

1. K dječaka je smješteno na krug. Svaki od njih ima paran broj slatkiša. U jednoj rundi svaki dječak daje pola svojih slatkiša dječaku sa svoje desne strane. Ako poslije ove podjele neki dječak ima neparan broj slatkiša, neko izvan kruga mu daje još jedan slatkiš kako bi imao paran broj slatkiša. Ovaj postupak se može beskonačno mnogo puta ponavljati. Dokaži da će se nekad desiti da svi dječaci imaju isti broj slatkiša.

2. Šest muzičara okupilo se na koncertu. Nekih od ovih muzičara su svirali dok su ostali slušali kao članovi publike. Koji je najmanji broj koncerta koji bi trebali biti održani kako bi se omogućilo da svaki muzičar sluša kao član publici sve ostale muzičare?

3. Na otoku živi 13 kameleona sive, 15 smeđe i 17 crvene boje. Ako se sretnu dva kameleona različite boje, oba istovremeno promijene boju u treću boju (npr. ako se susretnu sivi i smeđi kameleon oboje se promijene u crvenu). Je li moguće da na kraju svi budu iste boje?

4. Neka je L tačka na stranici BC trougla ABC takva da je AL duplo duža od težišnice CM. Ako je $\measuredangle ALC = 45^\circ$, dokaži da je AL okomito na CM.

5. Imamo 68 novčića različite težine. Pokazati kako možemo u 100 vaganja naći najteži i najlakši novčić.

6. N je proizvod dva uzastopna prirodna broja.

a) Dokaži da možemo dodati dvije cifre s desne strane broja N tako da novonastali broj bude potpun kvadrat.
b) Dokaži da se cifre mogu dodati na samo jedan način ako je $N > 12$.

7. Neka je p prost broj. Koliko ima prirodnih brojeva n tako da je p+n faktor broja pn?

8. Nađi sve prirodne brojeve n za koje postoji m tako da $2^n - 1$ dijeli $m^2 + 289$.

9. Broj 4 ima neparan broj neparnih djelilaca (1) i paran broj parnih djelilaca (2 i 4). Postoji li prirodan broj koji ima neparan broj parnih i paran broj neparnih djelitelja?

10. U pravouglom trouglu s pravim uglom kod vrha C su izabrane tačke K, L i M na stranicama AC, BC i AB redom tako da je $AK = BL = x$, $KM = LM = y$ i $\measuredangle KML = 90^\circ$. Dokaži da je $x = y$.

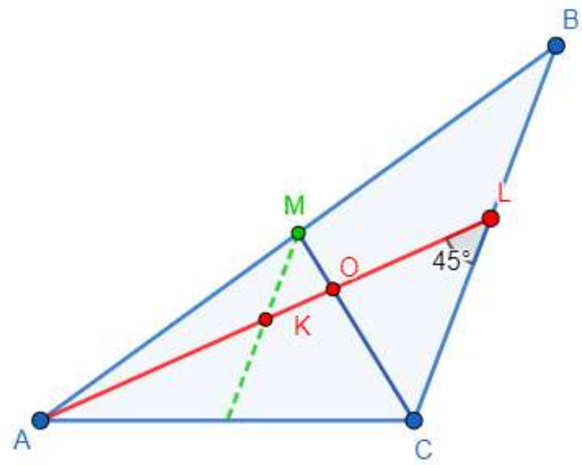
Rješenja

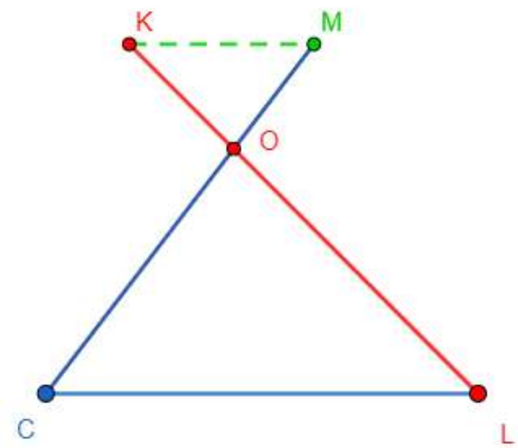
1. Označimo maksimalni broj slatkiša koji neki dečak ima sa $2m$, a minimalni 2n. Pretpostavimo da je $m > n$. Tvrdimo da nakon bilo koje runde nijedan dječak ne može imati više od 2m slatkiša. To je zato što je mogao zadržati najviše m slatkiša i dobiti najviše m od susjeda, a u tom slučaju neće dobiti dodatni slatkiš od nekog izvan kruga. Da bi dobio dodatni slatkiš mora imati neparan broj slatkiša, dakle najviše $2m - 1$, pa i nakon toga neće imati više od 2m. S druge strane, bar jedan dječak koji je imao 2n slatkiša će imati više od toga, jer sve dok je $m > n$, jedan od tih dječaka će dobiti više nego što daje. Iz toga proizlazi da se maksimum ne može povećati, a minimum se mora povećavati dok svi ne budu imali isti broj slatkiša.

2. Označimo muzičare sa A, B, C, D, E i F. Pretpostavimo da postoje samo tri koncerta. Budući da svaki od šest muzičara mora svirati bar jednom, barem jedan koncert mora sadržavati dva ili više muzičara. Recimo da i A i B nastupaju na prvom koncertu. Moraju još nastupati jedan za drugog. Recimo, A nastupa na drugom koncertu za B i B u trećem za A. Sada C, D, E i F moraju svi nastupiti na drugom koncertu, pošto je to jedini put kada je B u publici. Analogno svi moraju nastupiti u trećem. Prvi koncert nije dovoljan da C, D, E i F nastupaju jedni za druge. Dakle, trebaju nam najmanje četiri koncerta. Možemo imati A, B i C u prvom, A, D i E u drugom, B, D i F u trećem i C, E i F u četvrtom.

3. Označimo broj kameleona crvene boje sa x, smeđe sa y i crvene sa z. U početku x, y i z daju različite ostatke po modulu 3. U jednom koraku se broj kameleona dvije boje smanji za po 1 (dakle ostatak te dvije boje po modulu 3 se poveća za 2), a broj kameleona treće boje poveća za 2. To znači da će x, y i z uvijek davati različite ostatke po modulu 3, pa nikad neće moći svi biti iste boje (jer bi tad broj kameleona neke dvije boje morao biti 0 po modulu 3).

4. Neka je K sredina AL, a O presjek MC i AL. Onda je $AK = KL = CM$ i MK je srednja linija trougla ALB, dakle MK i BL su paralelne duži pa su i MK i BL paralelne. Onda su trouglovi KOM i COL slični, pa vrijedi $KO/(KL - KO) = MO/(MC - OM)$. Kako je $KL = MC$, dobijamo da je $KO = OM$, dakle trougao KOM je jednakokraki trougao. $\measuredangle OLC = \measuredangle OKM = \measuredangle OMK = 45^{\circ}$, pa je $\measuredangle KOM = 90^{\circ}$.





5. Rješenje I: Prvo podijelimo novčiće na 34 para koja stavljamo na vagu i svaki put saznajemo koji je lakši koji teži od ta dva. Za to nam trebaju 34 koraka. Sve teže kovanice (njih 34) stavljamo na jednu stranu i dijelimo ih u 17 parova gdje opet razvrstavamo teže i lakše kovanice. Nastavljamo ovaj proces. Ako imamo neparan br. težih kovanica, 2k+1, pravimo k parova i nalazimo k težih kovanica, a jednu koja nije imala para nismo vagali i prenosimo je u sljedeći korak (npr. sad bismo od 17 kovanica napravili 8 parova, našli 8 težih kovanica i u sljedećem koraku bismo imali 9 kovanica, 8 težih + jednu koja nije imala para).
Trebat će ukupno $17 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 33$ vaganja da se nađe najteža kovanica, a na isti način i u isto koraka ćemo naći najlakšu. Ukupan broj vaganja je $34 + 33 + 33 = 100$.

Rješenje II: Zadatak možemo generalizovati - za $3n - 2$ vaganja nam je dovoljno za 2n novčića. Prvo ih dijelimo na n parova i pomoću n vaganja razvrstamo ih na gomilu sa težim i lakšim novčićima. Najlakši novčić se nalazi u gomili s lakšim, najteži u gomili s težim novčićima. Svako vaganje eliminira jedan novčić. Pošto imamo n novčića u jednoj gomili, dovoljno je $n - 1$ vaganja da nađemo najlakši i $n - 1$ da nađemo najteži.
Dakle, ukupno nam treba $n + (n - 1) + (n - 1) = 3n - 2$.

6. Neka je $N = n(n+1)$ i neka je broj koji nastane dodavanjem cifara M. Onda vrijedi da je $100n(n+1) \leq M \leq 100n(n+1) + 99$.

a) Ako dodamo 25, onda je $M = 100n(n+1) + 25 = (10n+5)^2$.

b) Ako je $N > 12$, onda je $n > 3$. Slijedi da je $100n(n+1) - (10n+4)^2 = 20n - 16 > 0$ i da je $100n(n+1) + 99 - (10n+6)^2 = -20n + 63 < 0$, pa je $(10n+5)^2$ jedino rješenje.

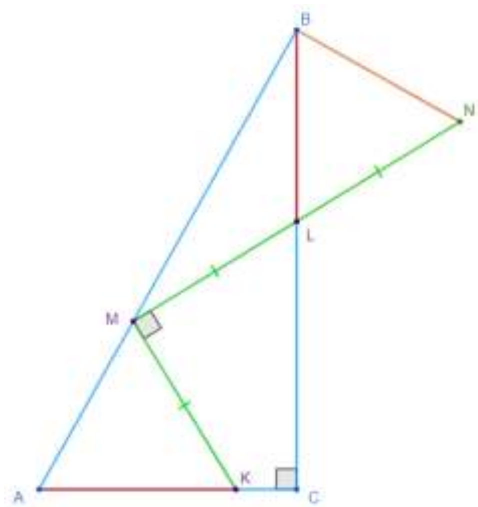
7. Neka je $pn = k(n+p)$. Onda je $pn = kn + kp$ i $n - k = kn/p$. Primijetimo da je $k < n$ i $k < p$. Slijedi da je $n = px$, pa je $px - k = kx$.
Onda vrijedi da x dijeli k, $k = ax$ i $p = a(x+1)$, pa kako je p prost i $x + 1 > 1$, slijedi da je $a = 1$, $k = x = p - 1$, pa je $n = px = p(p-1)$ jedino rješenje.

8. Vidimo da je $n = 1$ rješenje. Za $n > 1$ ćemo dokazati da ako prost broj q oblika $4k+3$ dijeli $a^2 + b^2$, onda q dijeli i a i b. (*)
Pretpostavimo suprotno tj. da q ne dijeli a. Onda je $nzd(a,q) = 1$. Neka je $c = a^{q-2}$.
Onda iz Male Fermaove teoreme slijedi $ac = a^{q-1} \equiv 1 (mod\ q)$.
Kako $q|a^2 + b^2$, vrijedi $b^2 \equiv -a^2\ (mod\ q)$. Onda je $(bc)^2 \equiv -(ac)^2 \equiv -1\ (mod\ q)$ i $(bc)^{q-1} = (bc)^{2(2k+1)} \equiv -1\ (mod\ q)$, što je u kontradikciji s Malom Fermaovom teoremom. Dokazali smo da q dijeli a, a samim time i b.

Kako je za $n > 1$ $2^n - 1 \equiv 3\ (mod\ 4)$, $2^n - 1$ ima prost faktor $q \equiv 3\ (mod\ 4)$. U suprotnom bi svi prosti faktori broja $2^n - 1$ bili oblika $4k+1$, pa bi i on sam bio tog oblika. Koristeći ovo, dobijamo da neki prost broj $q = 4k+3 |\ m^2 + 289 = m^2 + 17^2$, pa $q|m$ i $q|17$. Jedini prosti faktori broja 17 su 1 i 17, ali oba su oblika $4k+1$, pa slučaj $n > 1$ nema rješenja.
Ideja primijenjena u ovom zadatku (*) se često koristi, stoga je korisno zapamtiti je.

9. Pretpostavimo da postoji takav prirodan broj n. Kako ima paran broj neparnih i neparan broj parnih djelilaca, n ukupno ima neparan broj djelilaca. To znači da je n kvadrat (da bi broj djelilaca bio neparan, svaki prost faktor broja mora imati paran eksponent što važi samo ako je broj kvadrat). Napišimo n kao proizvod njegovog parnog i neparnog dijela kako bismo lakše mogli posmatrati parne i neparne djelioce. Neka je $n=(2^k y)^2$ gdje je y neparno. Neparni djelioci broja n su ustvari neparni djelioci y^2, a njih ima neparan broj. Dakle, takvo n ne postoji.

10. Rješenje: Produžimo ML preko L do tačke N tako da je $LN = LM$. Kako je $KMLC$ tetivan ($\measuredangle KML + \measuredangle LCK = 180^\circ$), imamo da je $\measuredangle MLC = \measuredangle BLN = 180^\circ - \measuredangle MKC = \measuredangle AKM$. Po pravilu SUS slijedi da su trouglovi NLB i MKA podudarni, pa je $\measuredangle NBL = \measuredangle CAB$, pa je $\measuredangle NBM = 90^\circ$. Iz tog slijedi da $je\ BL = NL = ML$, dakle $x = y$.



RELATIVNO PROSTI BROJEVI

Ovaj članak je ideja Mirnesa Fehrića, učenika I_1, a konačni oblik članka je rezultat Mirnesove saradnje sa urednikom Borisom Stankovićem. Mirnes je pobjednik Zimskog kampa za nadarene matematičare 2020. u srednjoj grupi.

Najveći zajednički djelitelj dva broja je najveći broj kojim su djeljiva ta dva broja.
Npr., najveći zajednički djelitelj brojeva 2 i 8 je 2. Pišemo: $NZD(2, 8) = 2$
Najmanji zajednički sadržilac dva ili više brojeva je najmanji broj koji je djeljiv svim tim brojevima.
Tako je najmanji zajednički sadržilac (NZS) brojeva 6 i 4 jednak 12.

U zadacima nam posebno mogu biti zanimljivi brojevi čiji je NZD jednak 1. Za njih važe mnoge lijepe i korisne osobine s kojima ćemo se upoznati u ovom članku.
Brojeve čije je NZD jednak 1 nazivamo **relativno prostim**. Relativno prosti brojevi nemaju zajedničkih faktora, tj. nemaju zajedničkih djelitelja. Npr. 10 i 21 su relativno prosti, a 2 i 8 očigledno nisu.

Vrijedi sljedeće (ovo nemojte ni slučajno učiti napamet kao neke definicije, već razmislite dobro o ovome):

- Ako su x i y relativno prosti prirodni brojevi ne postoji prost broj p takav da $p|x$ i $p|y$
- Ako ne postoji prost broj p koji dijeli i x i y onda su oni relativno prosti

Ovo je maksimalno logično, da ako brojevi nemaju nikakvih zajedničkih faktora onda nemaju ni zajednički prost faktor (to nam govori prvi dio), ali i da ako nemaju zajedničkih prostih faktor onda nemaju nikakvih zajedničkih faktora pa su relativno prosti.

U zadacima najčešće ako želimo dokazati da su neka dva broja relativno prosta pretpostavimo da postoji neki prost broj p koji dijeli oba i onda dobijamo kontradikciju, najčešće dobijemo ili da $p|1$ ili da p dijeli neka druga dva broja koja su po uslovu zadatka relativno prosta (ili znamo da su relativno prosti iz bilo kog drugog razloga).
U nastavku teksta bit će objašnjeno kad je i zašto bolje uzeti da prost broj p dijeli neke x i y za koje želimo dokazati da su relativno prosti, tj. zašto će nas nekad pretpostavka $p|x, p|y$ dovesti do kontradikcije, a pretpostavka $d|x, d|y$ gdje je $d = NZD(x, y)$ nas ne bi dovela do kontradikcije.

Primijetimo da je za relativno proste brojeve x i y njihov NZS zapravo njihov proizvod, kao i da vrijedi obrat da ako je za neka dva broja njihov NZS jednak proizvodu onda su oni relativno prosti. (Razmislite zašto to vrijedi, možete razmišljati o tome zašto ako nisu relativno prosti je NZS sigurno manji od proizvoda...)

Primjer 1. Dokažite da vrijedi:

(a) $NZD(a, a + 1) = 1$,

(b) $NZD(ab + 1, a) = 1$.

Rješenje:

(a) Neka je $d = NZD(a, a + 1)$. Tada $d|a, d|a + 1$ pa d dijeli i razliku ova dva broja, tj. $d|1$ odakle očito slijedi $d = 1$.

Primijetimo da nam ovdje nije bitno da li smo posmatrali da NZD(a, a+1) dijeli oba ili da smo uzeli prost faktor p koji dijeli oba. Tj. pretpostavka da postoji p koji dijeli oba ova broja, bi nam analogno kao gore dala p|1, što bi značilo da ne smiju imati zajednički prost faktor pa su relativno prosti.

(b) Primijetimo da je ovo samo generalizacija dijela pod (a), tj. dio pod (a) je ovaj zadatak za b=1. Neka je d=NZD (ab+1,a). Tada d|a, d|ab+1. Kako d dijeli a, dijelit će i a pomnoženo sa bilo čime, pa d|ab, odakle d|1.

Ponovo smo mogli uzeti i prost faktor p koji dijeli oba, i raditi isto sa p što smo radili sa d, pa bismo dobili p|1

Primjer 2. U zavisnosti od prirodnog broja n naći sve moguće vrijednosti za:

a) $NZD(n, n + 2)$
b) $NZD\ (2n, 2n + 6)$
c) $NZD\ (n^2 + 1, (n + 1)^2 + 1)$

Rješenje:

a) Označimo $NZD(n, n + 2) = d$. Tada $d|n, d|n + 2$ pa $d|(n + 2) - n = 2$, odakle d može biti 1 ili 2. Kako $d|n$ vidimo da je $d = 2$ ako je n parno, a za n neparno je $d = 1$.

   Napomena: Ovdje nismo mogli uraditi zadatak direktno posmatranjem nekog prostog faktora p koji dijeli i n i $n + 2$. Dobili bismo na isti način kao gore da $p|2$, ali odatle nam ne slijedi da $NZD(n, n + 2)$ mora biti 1 ili 2.
   Uvijek moramo biti oprezni i razmišljati šta zapravo možemo i smijemo zaključiti iz onog što smo dobili. Ako dobijemo da $d|2$ onda nam je zadatak skoro pa gotov, ali iz $p|2$ nemamo ni blizu kompletno rješenje jer smo dobili samo da ako n i $n + 2$ imaju neki zajednički prosti faktor onda je to 2. Međutim, iz toga ne slijedi nikako da npr. ne mogu oba biti djeljiva s 4 ili s 8... Tj. mi samo znamo da im je jedini zajednički prostor faktor 2, ali ne znamo koliko koji od njih dvica ima u sebi. Naravno mogli bismo dokazati da ne mogu oba biti djeljiva s 4 i odatle bi nam slijedilo da je njihov NZD 1 ili 2. To bismo uradili tako što pretpostavimo da $4|n, 4|n + 2$ odakle bi slijedilo da $4|2$ što je kontradikcija, pa pretpostavka da su oba djeljiva s 4 nije tačna.

Međutim, to je očito nepotrebno komplikovanje. Kada god trebamo naći u zavisnosti od n NZD neka dva izraza lakše je i bolje odmah posmatrati da d dijeli oba (jer ćemo to gotovo sigurno tzv. „spuštanjem stepena“-istom metodom kojom rješavamo probleme tipa naći sve n za koje $n+1|4n+5$ ili $n^2+5n+7|n^2+7n+8$ moći svesti na to da d dijeli neki broj) nego se petljati sa nekim prostim faktorom.

b) Ako je $NZD(2n, 2n+6)=d$ lagano dobijamo $d|6$. Kako su $2n$ i $2n+6$ parni njihov NZD je također paran. Dakle imamo da je $d=2$ ili $d=6$. Ako je $d=6$ onda je $2n$ djeljivo s 3, pa je n djeljivo s 3. U suprotnom mora vrijediti $d=2$ pa konačno zaključujemo da je $NZD(2n, 2n+6)=6$ ako je n djeljivo s n, a ako n nije djeljivo s 3 onda je $NZD(2n, 2n+6)=2$.

Napomena: U ovom primjeru bismo za prost faktor dobili $p|6$, pa bismo se morali „peglati“ zašto ne mogu oba biti djeljiva sa 9 ili sa 4. S druge strane, vidjet ćemo zašto je korisnije posmatrati proste faktore kad dokazujemo da su neka dva broja relativno prosta.

c) Neka je $NZD\ (n^2+1, (n+1)^2+1)=d$. Imamo $d|n^2+1, d|n^2+2n+1+1$, pa $d|2n+1$ (tj. razliku $(n+1)^2+1$ i n^2+1). Sada imamo da $d|2\cdot(n^2+1)=2n^2+2$ i $d|n\cdot(2n+1)=2n^2+n$, pa $d|n-2$. Odatle kombinujući $d|2n+1$ i $d|n-2$ imamo $d|(2n+1)-2\cdot(n-2)=5$. Iz $d|5$ imamo da $d\in\{1,5\}$. Ako je $d=5$ onda $5|n-2$, odnosno n je oblika $5k+2$ gdje je k neki nenegativan prirodan broj. Dakle $NZD\ (n^2+1, (n+1)^2+1)=5$ samo ako je $n=5k+2$, a za sve ostale prirodne brojeve n je $NZD\ (n^2+1, (n+1)^2+1)=1$.

Opet je jasno zašto je u ovom primjeru bilo bolje raditi s d, a ne s proizvoljnim prostim faktorom p.

U nastavku članka upoznat ćemo se s dvije korisne osobine koje često koristimo u zadacima. Obje su veoma poznate i primjenjive, smijete ih na takmičenju koristiti bez dokaza.

OSOBINA 1: Ako su a, b prirodni brojevi onda je $NZD(a,b)\cdot NZS(a,b)=ab$.

Dokaz: Neka je $NZD(a,b)=d$ i neka je $a=d\cdot u, b=d\cdot v$ pri čemu je $NZD(u,v)=1$. Dovoljno je dokazati da je $NZS(a,b)=duv$.

Očigledno je duv zajednički sadržalac brojeva a i b, potrebno je još dokažemo da je on njihov najmanji zajednički sadržalac. Ako bi duv bio njihov NZS svaki drugi sadržalac brojeva a, b bi bio djeljiv s njim, pa zato ima smisla pokšati dokazati upravo to-da je svaki drugi sadržalac brojeva a, b djeljiv s duv. S druge strane, ako bismo dokazali da je svaki drugi sadržalac djeljiv s duv odatle odmah slijedi da je duv NZS jer su svi drugi sadržaoci veći od njega zbg toga što su djeljivi njime. Neka je X neki proizvoljan sadržalac brojeva a, b. Tada zbog $a|X$ je $X = k \cdot a = k \cdot d \cdot u$ za neki prirodan broj k. Iz $b|X$ imamo $d \cdot v | k \cdot d \cdot u$, odakle $v | k \cdot u$, a odatle imamo da $v|k$ jer su u, v relativno prosti. Iz $v|k$ slijedi da $duv|X$ što smo i htjeli dokazati. Dakle dokazali smo da duv dijeli svaki sadržalac brojeva a, b odakle je $NZS(a, b) = duv$.

Primijetimo da smo na ovaj način mogli odabrati za X sam broj $NZS(a, b)$ pa bismo dobili $duv|NZS(a, b)$ odakle bi moralo slijediti $duv = NZS(a, b)$ jer su oba sadržaoci brojeva a, b, a NZS je po definiciji najmanji sadržalac ovih brojeva.

Dakle, bitno je zapamtiti:

Ako je $NZD(a, b) = d, a = d \cdot u, b = d \cdot v$ onda je $NZS(a, b) = duv$.

Kanonska faktorizacija

Da bismo uveli drugu osobinu, prvo ćemo uvesti pojam ***kanonske faktorizacije.***

Još u 6. ili 7. razredu naučili rastavljati broj na proste faktore. Npr $15 = 3 \cdot 5$, $792 = 8 \cdot 9 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$. Upravo ovaj proizvod $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$ je kanonska faktorizacija broja 792. Tj. svaki broj nakon rastavljanja na proste faktore možemo napisati kao proizvod nekoliko stepena različitih prostih brojeva. Takav zapis prirodnog broja n naziva se kanonski zapis, odnosno kanonska faktorizacija broja n.

Neka su $p_1, p_2, \dots, p_k$ svi prosti faktori broja n. Tada je kanonski zapis broja n:

$$n = {p_1}^{a_1} \cdot {p_2}^{a_2} \cdot \dots \cdot {p_k}^{a_k}$$

Brojevi $a_1, a_2, \dots, a_k$ naravno mogu biti različiti, samo znamo da su svi prirodni jer svi p-ovi dijele n. Možemo primijetiti da je a_1 najveći stepen prostog broja p_1 koji se nalazi u n. Npr. za $n = 792$ je $p_1 = 2, a_1 = 3$. Kažemo da je najveći stepen dvice u 792 jednak 3 jer je 792 djeljivo sa 8 odnosno 2^3, a nije sa $2^4 = 16$.

Još neki primjeri kanonskih faktorizacija su:

$1875=3 \cdot 5^3$, $83824=2^4 \cdot 13^2 \cdot 31$, $105=3 \cdot 5 \cdot 7$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Kako svaki prirodan broj, osim 1, možemo napisati kao proizvod nekih prostih faktora to svaki broj, osim 1, ima svoju jedinstvenu kanonsku faktorizaciju.

OSOBINA 2: Ako su a, b relativno prosti prirodni brojevi takvi da je njihov proizvod potpun kvadrat, tj. ako je $ab = x^2$ za neki prirodan broj x, onda su i a i b potpuni kvadrati.

Dokaz: Primijetimo da je broj potpun kvadrat ako i samo ako su mu eksponenti kod svih prostih brojeva u njegovoj kanonskoj faktorizaciji parni, tj. ako sadrži svak faktor paran broj puta. Npr. broj $2^8 \cdot 13^2 \cdot 43^6$ jeste potpun kvadrat (možete to gledati kao da svaki od faktora zsebno možemo korijenovati i dobiti prirodan broj), a broj $2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^{12} \cdot 11^{11}$ nije jer eksponent kod 11 nije paran.

Kako su a i b relativno prosti oni nemaju zajedničkih prostih faktora, tj. ako se neki p pojavljuje u a on se i u ab pojavljuje s istim stepenom u kanonskoj faktorizaciji kao i u a (jer se u b ne nalazi nijedan p). Kako je u ab stepen svih prostih faktor paran, a za svaki prost faktor je to njegov stepen ili u a ili u b onda su i a i b potpun kvadrati.

PRIMJERI ZADATAKA (savjetujemo da ih prvo pokšate samostalno uraditi, a onda pogledate rješenja):

1. Naći sve prirodne brojeve a i b tako da je $2 \cdot NZS(a,b) = 25 \cdot NZD(a,b) - 4$
2. Neka su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $ab \mid a^2 + b^2$. Dokazati da je $a = b$.
3. Neka su x i z relativno prosti prirodni brojevi. Ako vrijedi:
4. $(y^2 - x^2) - (x^2 - z^2) = ((y - x) - (z - y))^2$, dokazati da su x i z potpuni kvadrati.
5. Naći sve trojke (x,y,z) prirodnih brojeva takvih da je y prost broj,y i 3 ne dijele z i vrijedi $x^3 - y^3 = z^2$

RJEŠENJA:

1. Neka je $NZD(a,b) = d, a = da_1, b = db_1, NZD(a_1, b_1) = 1$

Tada je NZS(a, b) = da_1b_1. Imamo:

$2da_1b_1 = 25d - 4 \Leftrightarrow 4 = 25d - 2da_1b_1 \Leftrightarrow 4 = d(25 - 2a_1b_1) \Rightarrow d \mid 4$

Kako je $25 - 2a_1b_1$ sigurno neparno i $25 - 2a_1b_1 | 4$ zaključujemo da mora vrijediti $25 - 2a_1b_1 = 1, d = 4$

Sada je $a_1b_1 = 12$. Kako su a_1 i b_1 prirodni brojevi i $(a_1, b_1) = 1$, onda su jedina rješenja: $(a_1, b_1) = \{(1,12), (3,4), (4,3), (12,1)\}$ tj. $(a,b) = \{(4,48), (12,16), (16,12), (48,4)\}$.

2. Kad imamo djeljivosti u kojoj su obje strane istog stepena pomaže uvesti NZD jer bi tada dobili isti uslov za relativno proste brojeve jer bi se NZD bi se pokratio. Isto tako mi sa uslovom $ab \mid a^2 + b^2$ sa prirodnim brojevima ne možemo puno uraditi dok sa relativno prostim brojevima možemo. Zbog toga ćemo uvesti NZD.Neka je $NZD(a,b) = d$.

Tada je $a = a_1 \cdot d$ i $b = b_1 \cdot$ d, gdje su brojevi a_1 i b_1 relativno prosti. Uvrštavajući u uvjet zadatka dobivamo: $d^2a_1b_1 \mid d^2(a_1^2 + b_1^2) \Rightarrow a_1b_1 \mid a_1^2 + b_1^2 \Rightarrow a_1 \mid b_1^2$. Budući da su a_1 i b_1 relativno prosti, slijedi da je $a_1 = 1$.Ukoliko je $a_1 \neq 1$ onda bi postojao prost broj p takav da p $|a_1$ Kako $a_1 \mid b_1^2$, to slijedi da p $|b_1$. Međutim, sada p $|a_1$ i p $\mid b_1$, što nije moguće jer su a_1 i b_1 relativno prosti. Analogno dobivamo i $b_1 = 1$. Sada je $a = b = d$, što je trebalo dokazati.

3. Nakon sređivanja zadate jednačine dobivamo: $x^2 + y^2 + z^2 + xz - 2yz - 2xy = 0$. Dodavanjem xz na obje strane dobivamo: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 2yz - 2xy = xz \Rightarrow (x - y + z)^2 = xz$. Budući da su x i z relativno prosti i njihov proizvod je potpun kvadrat, onda su i x i z također potpuni kvadrati

4. Imamo da je $z^2 = x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y).((x-y)^2 - 3xy)$. Dokažimo da su brojevi u zagradama relativno prosti. Pretpostavimo suprotno, neka postoji neki prost broj p koji dijeli obje zagrade. Jasno je da tada $p\,|z$. Kako $p|x-y$ to $p|3xy$. Međutim, jasno je da su slučajevi $p = 3$ i $p = y$ nemogući, jer 3 i p ne dijele z. Dakle, $p|x$. Ali zbog $p|x- y$ dobijamo $p|y$, što je nemoguće. Dakle, brojevi u zagradama su relativno prosti. Kako su ti brojevi relativno prosti, a njihov proizvodje potpun kvadrat, to su i ta dva broja kvadrati. Neka je $x - y = u^2$ i $x^2 + xy + y^2 = v^2$
   Nakon množenja druge jednakosti sa 4, dobijamo $3y^2$=$(2v - x - y)(2y + x + y)$ pa kako je y prost broj imamo 3 slučaja:

   1. $2v - x - y = y, 2v + x + y = 3y$. Nakon oduzimanja dobijamo $x = 0$, što je nemoguće.

   2. $2v - x - y = 1$,$2v + x + y = 3y^2$. Nakon oduzimanja dobijamo $3y^2 - 1 = 4x + 2y = 4(x-y) + 6y = 4u^2 + 6y$ tj. $3y^2 - 6y - 3u^2 = u^2 + 1$, odakle $3|u^2$+1, što je nemoguće.

   3.
   3. $2v - x - y = 3, 2v + x + y = y^2$ Nakon oduzimanja dobijamo, $y^2 - 3 = 4x + 2y = 4(x-y) + 6y = 4u^2 + 6y$ tj. $(y-3)^2 - (2v)^2$=12.
   Sada lagano dobijamo rješenje: $(x, y, z) = (8,7,13)$

Zadaci za samostalan rad

1. Ako su a i b prirodni brojevi takvi da je $\frac{a}{b} + \frac{b+1}{a}$ prirodan broj, dokažite da je b potpun kvadrat.
2. Nađite sve parove (a, b) prirodnih brojeva takvih da je $NZD(a,b) + NZS(a,b) + a + 2b = ab$
3. Odredite sve parove (a, b) cijelih brojeva tako da su $\frac{2a+3}{b} + \frac{2b+3}{a}$i $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ također cijeli brojevi.

PRIPREME ZA TAKMIČENJA

U proteklom periodu učenici matematičkih odjeljenja Druge gimnazije Sarajevo su se kroz razne načine zajedničkog rada pripremali za takmičenja. Njihova druženja protkana su razmjenom mišljenja o matetematičkim zadacima i njihovoj primjeni.

Izdvojit ćemo vam nekoliko zadataka koje su uradili gotovo svi učenici iz ovog tima, a Hana Ćatić IV_1 ih je pripremila za ovaj časopis.

Hana Ćatić je učenica IV_1 razreda i ona je već sedam godia uspješna takmičarka iz matematike i predana umjetnička duša ☺ , a 2020. će predstavljati Bosnu i Hercegovinu na EGMO, što predstavlja krunu njene matematičke karijere.

Zadatak 1:

Dokazati da je $N_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{77}+\sqrt{78}} + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$

Rješenje: Neka je

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{81}+\sqrt{80}}$$

$$\begin{aligned} S = N_1 + N_2 &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \cdots + \frac{\sqrt{80}-\sqrt{79}}{80-79} + \frac{\sqrt{81}-\sqrt{80}}{81-80} \\ &= \sqrt{81} - 1 = 8 \end{aligned}$$

$$N_2 < N_1 \implies N_1 + N_2 < 2\,N_1$$

$$\implies 8 = S < 2\,N_1$$

$$8 < 2N_1 \implies N_1 > 4$$

Zadatak 2:

Dokazati da beskonačan niz $2^n - 3$ ($n = 2,3,4,\dots$), sadrži beskonačno mnogo članova djeljivih sa 5 i beskonačno mnogo članova djeljivih sa 13; ali ne sadrži član djeljiv sa $5 \cdot 13$.

Prvo rješenje: (*Hana Ćatić*) Prvo dokažimo da ima beskonačno mnogo članova niza djeljivih sa 5.

$$2^2 \equiv 4 \ (mod\ 5)$$

$$\begin{aligned} 2^3 &\equiv 3 \ (mod\ 5) \\ 2^4 &\equiv 1 \ (mod\ 5) \\ 2^5 &\equiv 2 \ (mod\ 5) \\ 2^6 &\equiv 4 \ (mod\ 5) \\ 2^7 &\equiv 3 \ (mod\ 5) \end{aligned}$$

$$2^8 \equiv 1\ (mod\ 5)$$
Zaključujemo da za $n = 4k,\ k \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$2^n \equiv 1\ (mod\ 5)$$
Dokažimo indukcijom:

- Baza indukcije $k = 1$ a $n = 4$;
$$2^4 \equiv 1\ (mod\ 5)$$
- Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = 4k$
$$2^{4k} \equiv 1\ (mod\ 5)$$
- Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = 4k + 4$;
$$2^{4k+4} \equiv 2^{4k} \cdot 2^4 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1\ (mod\ 5)$$

Dakle, tvrđenje je dokazano principom matematičke indukcije.

Iz gore dokazanog slijedi
$$2^{4k+3} \equiv 8 \equiv 3\ (mod\ 5)$$
za svako $n = 4k + 3,\ k \in \mathbb{N}$ iz toga zaključujemo da ih ima beskonačno mnogo članova niza djeljivih sa 5 tj.
$$2^{4k} \equiv 1\ (mod\ 5)\ \ (1)$$
Sada dokažimo da postoji beskonačno mnogo članova niza djeljivih sa 13:
$$2^2 \equiv 4\ (mod\ 13)$$
$$2^3 \equiv 8\ (mod\ 13)$$
$$2^4 \equiv 3\ (mod\ 13)$$
$$2^5 \equiv 6\ (mod\ 13)$$
$$2^6 \equiv 12\ (mod\ 13)$$
$$2^7 \equiv 11\ (mod\ 13)$$
$$2^8 \equiv 9\ (mod\ 13)$$
$$2^9 \equiv 5\ (mod\ 13)$$
$$2^{10} \equiv 10\ (mod\ 13)$$
$$2^{11} \equiv 7\ (mod\ 13)$$
$$2^{12} \equiv 1\ (mod\ 13)$$
$$2^{13} \equiv 2\ (mod\ 13)$$
$$2^{14} \equiv 4\ (mod\ 13)$$
$$2^{15} \equiv 8\ (mod\ 13)$$
$$2^{16} \equiv 3\ (mod\ 13)$$
Zaključujemo da za $n = 12k,\ k \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$2^n \equiv 1\ (mod\ 13)$$
Dokažimo indukcijom:

- Baza indukcije $k = 1$ a $n = 12$;
$$2^{12} \equiv 1\ (mod\ 13)$$
- Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = 12k$
$$2^{12k} \equiv 1\ (mod\ 13)$$
- Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = 12k + 12$;
$$2^{12k+12} \equiv 2^{12k} \cdot 2^{12} \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 (mod\ 13)$$

Dakle, tvrđenje je dokazano principom matematičke indukcije.

Iz gore navedenog slijedi

$$2^{12k+4} \equiv 2^{12k} \cdot 2^4 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3\ (mod\ 13)$$

za svako $n = 12k + 4$, $k \in \mathbb{N}$ iz toga zaključujemo da ih ima beskonačno mnogo članova niza djeljivih sa 13 tj.

$$2^n \equiv 3\ (mod\ 13) \quad (2)$$

Iz (1) imamo $n = 4k + 3$ slijedi n je neparan broj, a iz (2) imamo $n = 12k + 4$ slijedi n je paran broj, slijedi da zadani niz ne sadrži član djeljiv sa $5 \cdot 13$, jer bi to značilo da postoji n ujedno paran i neparan što je nemoguće**.**

Drugo rješenje:

Prema Maloj Fermaovoj teoremi je $2^4 \equiv 1(mod\ 5)$, $2^{12} \equiv 1(mod\ 13)$

Kako je $2^3 \equiv 3(mod\ 5)\ \wedge\ 2^4 \equiv 3(mod\ 13) \Longrightarrow\ 2^{4k+3} \equiv 3(mod\ 5) \wedge\ 2^{12k+4} \equiv 3(mod\ 13)$

$(k = 0,1,2, . .)$

Dakle, $5]\ 2^{4k+3} - 3\ \wedge 13]\ 2^{12k+4} - 3$.

Dalje je, $2^6 \equiv -1\ (mod\ 65) \Longrightarrow 2^{12} \equiv 1\ (mod\ 65) \Longrightarrow 2^{n+12} - 3 \equiv 2^n - 3\ (mod\ 65)$,
što pokazuje da niz ostataka po modulu 65 niza $2^n - 3$ $(n = 2,3, , . .)$ je periodičan sa periodom 12.

Da bi smo dokazali da nijedan od brojeva $2^n - 3$ je djeljiv sa 65 , to je dovoljno provjeriti da li je $2^n - 3$ djeljiv sa 65.

Lako se nalazi da ostaci pri djeljenju sa 65 su $1, 5, 13, 29, 61, 60, 58, 54, 46, 30, 63, 64$ i nijedan od ostataka nije 0.

<u>Zadatak 3:</u>

Svaki od 10 zlatara su dali gospodinu Zlatku vreću zlatnika. Svaka vreća sadrži 10 zlatnika, jedan zlatnik teži jednu uncu.Tačno jedna vreća je lakša(sadrži lakše zlatnike). Svaki od zlatnika u toj vreći je za 0,1 uncu lakši. Gospodin Zlatko želi identifikovati prevaranta samo jednim mjerenjem na vagi. Kako to može uraditi?

Rješenje:

Poredamo vreće. Uzmemo jedan zlatnik iz prve vreće, 2 zlatnika iz druge vreće , 3 iz treće....10 zlatnika iz desete vreće.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 10\ =\ 55$ zlatnika, i zaključujemo na slijedeći način:

Npr. ako je vreća lakša za 0,5 unca , slijedi da je 5 zlatnika lakših i zaključujemo da je u pitanju peta vrća tj. peti zlatar je prevarant.

<u>Zadatak 4:</u>

Zadan je niz $x_0 = 2003$, $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$, $n \geq 1$. Odrediti x_{2020} .

Prvo rješenje:

Dokažimo da ovaj niz ima period 4, $x_{n+4} = x_n$, $\forall n \geq 1$.

Definišimo α_n, $-\frac{\pi}{2} < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, tada je $tg\alpha_n = x_n$.

Jasno $x_n \in R$, α_n jedinstveno tg: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R$ je bijekcija.

$$tg\alpha_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n} = \frac{1+tg\alpha_n}{1-tg\alpha_n} = \frac{tg45^\circ + tg\alpha_n}{1-tg45^\circ \cdot tg\alpha_n} = tg(45^\circ + \alpha_n)$$

Posljedica je da je $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 45^\circ$ ili $\alpha_{n+1} = 45^\circ + \alpha_n - 180^\circ$ (period 180°)

$\alpha_{n+4} = \alpha_n + k \cdot 180^\circ \quad (k \in Z)$.

$x_{n+4} = tg\alpha_{n+4} = tg\,\alpha_n = x_n$.

Dakle, $\{x_n\}_{n\geq 0}$ ima period 4 i slijedi $x_{2020} = x_0 = 2003$

Drugo rješenje- Hana Ćatić

Posmatrajmo šta se dešava sa nizom;

$$x_0 = 2003$$

Prema općem obliku niza $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$

$$x_1 = \frac{1+x_0}{1-x_0} = \frac{1+2003}{1-2003} = \frac{2004}{-2002} = \frac{-1002}{1001}$$

$$x_2 = \frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{1+(\frac{-1002}{1001})}{1-(\frac{-1002}{1001})} = \frac{\frac{1001-1002}{1001}}{\frac{1+1002}{1001}} = \frac{-1}{2003}$$

$$x_3 = \frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{1+\frac{-1}{2003}}{1-\frac{-1}{2003}} = \frac{\frac{2003-1}{2003}}{\frac{2003-(-1)}{2003}} = \frac{2002}{2003+1} = \frac{2002}{2004} = \frac{1001}{1002}$$

$$x_4 = \frac{1+x_3}{1-x_3} = \frac{1+\frac{1001}{1002}}{1-\frac{1001}{1002}} = \frac{\frac{1002+1001}{1002}}{\frac{1002-1001}{1002}} = \frac{2003}{1} = 2003$$

Zaključujemo da $x_{n+4} = x_n$ dokažimo indukcijom

- Baza indukcije za $n = 0$; gore je dokazano da je $x_4 = x_0$;
- Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 4$, $k \in \mathbb{N}$,
$$x_{k+4} = x_k$$
- Dokažimo da tvrdnja vrijedi za n = (k+1)+4, koristimo pretpostavku u dokazu;
$$x_{k+5} = \frac{1+x_{k+4}}{1-x_{k+4}} = \frac{1+x_k}{1-x_k} = x_{k+1}$$

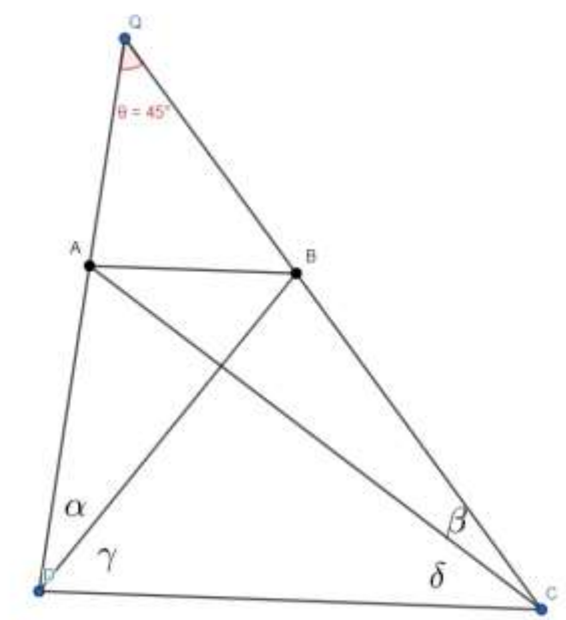
- Tvrdnja dokazana primjenom matematičke indukcije.

Prema dokazanoj tvrdnji slijedi da su svi članovi niza čiji indeksi daju isti ostatak pri djeljenju sa 4 toga zbog $2020 \equiv 0 \ (mod\ 4)$ slijedi $x_{2020} = x_0 = 2003$.

Zadatak 5:

U trapezu ABCD s osnovicama AB i CD, $|AB| = 4cm, |CD| = 10cm$. Neka se prave AC i BD sjeku pod pravim uglom,a prave BC i AD se sjeku u tački Q pod uglom od 45°. Izračunati površinu trapezoida ABCD.

Rješenje:



$$\underline{\Delta APB \sim \Delta CDP}$$

$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$, $AP = 2x, CP = 5x, BP = 2y, DP = 5y$

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC|\,|BD| = \frac{49\,xy}{2}$$

$$\Delta\, ADP\ i\ \Delta\, BCP$$

$tg\alpha = \frac{AD}{DP} = \frac{2x}{5y}$, $tg\beta = \frac{BP}{PC} = \frac{2y}{5x}$

Saberemo uglove APBQ i zaključimo da je $\alpha + \beta = 45^{\circ}$.

$tg45^{\circ} = tg(\alpha+\beta) = \frac{\frac{2x}{5y}+\frac{2y}{5x}}{1-\frac{2x}{5y}\cdot\frac{2y}{5x}}$, $\frac{10\,(x^2+y^2)}{21\,xy} = 1, xy = \frac{10\,(x^2+y^2)}{21}$

Trougao ABP , $x^2 + y^2 = 4$, $xy = \frac{40}{41}$

$P_{ABCD} = \frac{49\,xy}{2} \implies P_{ABCD} = \frac{140}{3}$

Drugo rješenje- Hana Ćatić

Označimo AQ sa b, a BQ sa a, DA sa x, BC sa y. Površinu trapezoida možemo izračunati kao razliku površina trouglova DQC i AQB;

$$P_{\mathrm{ABCD}} = P_{\Delta DQC} - P_{\Delta AQB} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} P_{\Delta DQC} &= \frac{|QD||QC|}{2}\sin 45^\circ \\ P_{\Delta AQB} &= \frac{|QA||QB|}{2}\sin 45^\circ \end{aligned}\right\} \, uvrstimo\ u\ (1)$$

$$\Rightarrow P_{\mathrm{ABCD}} = P_{\Delta DQC} - P_{\Delta AQB} = \frac{|QD||QC|}{2}\sin 45^\circ - \frac{|QA||QB|}{2}\sin 45^\circ$$
$$= \frac{\sin 45^\circ}{2}(|QD||QC| - |QA||QB|)$$

Gdje imamo iz postavke zadatka da je $QD = x + b$, $QC = y + a$, $QA = b$, $QB = x + a$; uvrstimo to u gore dobijeno, tada imamo:

$$P_{\mathrm{ABCD}} = \frac{\sin 45^\circ}{2}(|QD||QC| - |QA||QB|) = \frac{\sin 45^\circ}{2}[(x+b)(y+a) - ab] =$$
$$= \frac{\sin 45^\circ}{2}[xy + xa + yb + ab - ab] = \frac{\sin 45^\circ}{2}[xy + xa + yb] \ \ (*)$$

Sada je dovoljno da izračunamo $x, y, a\ i\ b$.
Iz Talesove teoreme za ΔDQC sa duži AB imamo

$$\frac{QA}{QD} = \frac{AB}{DC} = \frac{QB}{QC} \Leftrightarrow \frac{b}{x+b} = \frac{4}{10} = \frac{a}{y+a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{x+b} = \frac{2}{5} \quad \wedge \quad \frac{a}{y+a} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5b = 2x + 2b \quad \wedge \quad 5a = 2y + 2a \Leftrightarrow 3b = 2x \quad \wedge \quad 3a = 2y \qquad (2) \wedge (3)$$

Također imamo da vrijedi Talesova i za AB, CD to jeste sličnost $\Delta APB\ i\ \Delta DPC$ gdje je P tačka presjeka dijagonala trapezoida.

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{DC} = \frac{BP}{PD} \Leftrightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{4}{10} = \frac{BP}{PD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{2}{5} \quad \wedge \quad \frac{BP}{PD} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5AP = 2PC \quad \wedge \quad 5BP = 2PD \qquad (4) \wedge (5)$$

Za trouglove $\Delta APD\ i\ \Delta BPC$ vrijedi pitagorina teorema jer su uglovi kod P iz uslova zadatka 90°.

$$\Delta APD: \quad AD^2 = AP^2 + PD^2\ iz\ (4) \Rightarrow\ x^2 = \frac{4}{25}PC^2 + PD^2 \quad (6)$$

$$\Delta BPC: \quad BC^2 = BP^2 + PC^2\ iz\ (5) \Rightarrow\ y^2 = \frac{4}{25}PD^2 + PC^2 \quad (7)$$

$$(6) + (7) \Rightarrow\ x^2 + y^2 = \frac{4}{25}PC^2 + PD^2 + \frac{4}{25}PD^2 + PC^2 = \frac{29}{25}(PC^2 + PD^2) \quad (8)$$

Iz primjene Pitagorine teoreme na ΔPDC

$$DC^2 = PD^2 + PC^2 \Longrightarrow 100 = PD^2 + PC^2$$

Uvrstimo u (8) $\quad \Longrightarrow x^2 + y^2 = \frac{29}{25}(PC^2 + PD^2) = \frac{29}{25}100 = 29 \cdot 4 = 116 \ \ (9)$

Iz (2) ∧ (3); $3b = 2x \quad \wedge \quad 3a = 2y$ slijedi $\frac{3}{2}b = x\ \wedge\ \frac{3}{2}a = y$ uvrstimo to u (9) i (*);

$$\Longrightarrow \frac{9}{4}b^2 + \frac{9}{4}a^2 = 29 \cdot 4 \Leftrightarrow b^2 + a^2 = \frac{29 \cdot 16}{9}$$

$$\Rightarrow P_{\mathrm{ABCD}} = \frac{\sin 45°}{2}(xy + xa + yb) = \frac{\sin 45°}{2}\left(\frac{9}{4}ab + \frac{3}{2}ab + \frac{3}{2}ab\right) = \frac{\sin 45°}{2}\left(\frac{9+6+6}{4}ab\right) =$$
$$= \frac{\sin 45°}{8}21ab \quad (**)$$

Primjenimo kosinusnu teoremu na ΔABQ za stranicu AB

$$AB^2 = AQ^2 + BQ^2 - 2\mathrm{AQ} \cdot \mathrm{BQ} \cdot \cos 45° \Leftrightarrow 16 = b^2 + a^2 - 2ab \sin 45°$$

$$\Leftrightarrow 2ab \sin 45° = b^2 + a^2 - 16 \Leftrightarrow ab \sin 45° = \frac{b^2 + a^2 - 16}{2} \Leftrightarrow ab \sin 45° = \frac{\frac{29 \cdot 16}{9} - 16}{2}$$

$$\Leftrightarrow ab \sin 45° = \frac{16\left(\frac{29}{9} - 1\right)}{2} \Leftrightarrow ab \sin 45° = \frac{16\left(\frac{29 - 9}{9}\right)}{2}$$

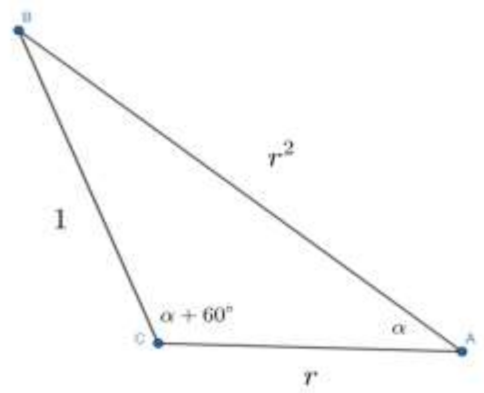
$$\Leftrightarrow \qquad ab \sin 45° = \frac{16}{2} \cdot \frac{20}{9}$$

Uvrstimo ovo u (**) $\quad \Rightarrow P_{\mathrm{ABCD}} = \frac{\sin 45°}{8}21ab = \frac{16}{8} \cdot \frac{20}{9} \cdot 21 = \frac{140}{3}$

Čime dobijamo da je tražena površina, površina trapezoida $\frac{140}{3}$

Zadatak 7: Zadan je trougao ABC takav da je $|AB| = r\ cm, |BC| = 1cm\ , |CA| = r^2cm$; $\measuredangle CAB = \alpha\ , \measuredangle ACB = \alpha + 60^{\circ}$. Ako je $r > 1$, dokazati da je $r < \sqrt{2}$.

Rješenje:



Primjenom sinusne teoreme, vrijedi:

$$\frac{r^2}{1} = \frac{\sin\left(60^{\circ}+\alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} \qquad (1)\ r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ctg\alpha + \frac{1}{2}\ , 0 < \alpha < 60^{\circ}$$

Primjenom kosinusne teoreme, slijedi:

$r^2 = 1 + r^4 - 2\,r^2\cos(120^{\circ} - 2\alpha)$ i $r^4 + 1 \geq 2r^2$

$$r^2 \geq 2r^2 - 2\,r^2\cos(120^{\circ} - 2\alpha)$$

$$\cos(120^{\circ} - 2\alpha) \geq \frac{1}{2} \quad (2)$$

Rješavanjem nejednačine (2) za ovaj trougao , zaključujemo $\alpha \geq 30^{\circ}$ (3)

Kako je ctgα je opadajuća funkcija iz (3) slijedi $ctg\alpha \leq \sqrt{3}$.

Prema (1) slijedi: $\quad r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ctg\alpha + \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} = 2$,
dakle vrijedi

$$r < \sqrt{2}$$

KONKURSNI ZADACI

Svaki zadatak koji pošaljete bit će bodovan s 10 bodova. Iz svake oblasti imate po 3 zadatka. Tabelu najuspješnijih učenika objavit ćemo u narednom broju, kao i najkreativnija rješenja, a planirane su i nagrade za najuspješnije učenike. Zadatke rješavajte samostalno i dobro se zabavite. Rješenja šaljite na matiks@2gimnazija.edu.ba

C1 U prostoriji se nalazi 20 osoba. Odlučili su da igraju igru. U svakoj rundi, svaki igrač dobija jednu od kartica sa napisanim brojem.

U 1. rundi, podijeljeno je 20 kartica na kojima su napisani brojevi od 1 do 20, tako da je na svakoj kartici napisan tačno jedan broj i ne postoje 2 kartice na kojima je napisan isti broj.

Ispada igrač koji je dobio karticu s brojem 1.

U 2. rundi, svakom od preostalih 19 igrača se podijeli jedna od kartica s brojevima od 1 do 19. Opet igrač s brojem 1 na kartici ispada.

Postupak nastavimo sve dok ne ostane jedan igrač. Njemu ćemo tada dati karticu s brojem 1 i on je pobjednik.

Ispostavilo se da niko nije dobio isti broj dva ili više puta.

Ivona i Ines su posljednje ostale u igri. Ukoliko je Ivona pobijedila, koji broj je Ines dobila u trećoj rundi igre?

C2 Dvije table se nalaze jedna do druge. Adisa i Salko igraju sljedeću igru. Adisa upisuje cifre na prvu tablu, a Salko na drugu pri čemu cifre upisuju naizmjenično (Adisa počinje). Cifre se upisuju s lijeva na desno, pri čemu se ne smije upisati neka cifra koja je već upisana. Postupak se završava kad se iskoriste sve cifre. Tada i Adisa i Salko imaju petocifren broj na svojim tablama (nula se ne smije upisati na prvo mjesto). Adisa je pobijedila ako je njen broj djeljiv sa 6, a u suprotnom je pobijedio Salko.

Ko od njih ima pobjedničku strategiju?

C3 Da li je moguće tablicu formata $n \times n$ popuniti nulama i jedinicama, a da pritom za svako i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, apsolutna vriednost razlike broja jedinica u i-toj vrsti i i-toj koloni bude jednaka 1, za:

a) $n = 2015$;

b) $n = 2016$?

A1 Izračunati abc ako je $a+b+c=m, a^2+b^2+c^2=n, a^3+b^3+c^3=p$ preko m, n, p.

A2 Neka su a, b, c različiti nenulti realni brojevi koji zadovoljavaju jednakost

$$\frac{ab}{b-c}+\frac{bc}{c-a}+\frac{ca}{a-b}=\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}+6abc$$

Naći sve moguće vrijednosti izraza:

$$\frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{1}{(b^2-c^2)^2}+\frac{1}{(c^2-a^2)^2}$$

A3 Neka su a,b i c različiti pozitivni realni brojevi takvi da je $(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\;\neq 0$. Dokaži da barem jedan od brojeva

$\frac{a+b}{a+b-c}$, $\frac{b+c}{b+c-a}$, $\frac{c+a}{c+a-b}$ pripada intervalu (1,2) i da barem jedan od tih brojeva ne pripada tom intervalu.

N1 Naći sve prirodne brojeve x i y takve da je $x\,(x-y)=8y-7$.

N2 Neka su a i b prirodni brojevi, a p prost broj takvi da je $a^2+p^2=b^2$.
Dokazati da je $2\,(b+p)$ kvadrat nekog prirodnog broja.

N3 Odredi sve proste brojeve $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{13}$ takve da je $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{12}^2 = p_{13}^2$ i jedan od njih je jednak $2p_1 + p_9$.

G1 Neka je BD simetrala unutašnjeg ugla ABC u trouglu ABC. Opisana kružnica trougla BDC siječe pravu A u E, a opisana kružnica trougla ABD siječe pravu BC u tački F. Dokazati da je $AE=CF$.

G2 Neka je H ortocentar oštrouglog trougla ABC, a M sredina stranice BC. Ako su D i E - redom podnožja normala iz tačke H na simetralu unutrašnjeg i vanjskog ugla kod vrha A, dokazati da su tačke M, D, E kolinearne.

G3 Neka je O centar opisane kružnice oštrouglog trougla ABC. Neka je AH visina to trougla, a M, N, P, Q sredine duži AB, AC, BH, CH, redom. Dokazati da jedna od tačaka presjeka kružnica opisanih oko trouglova AMN i POQ pripada visini AH.

KLUB MATEMATIKE

Adi Hujić, učenik II_1, na neki način maskota kluba i bh. matematike predstavit će Klub matematike u Drugoj gimnaziji i njegov rad u narednom članku. Osvajač je druge nagrade na Evropskom matematičkom kupu u juniorskoj kategoriji 2018. i bronzane medalje na Juniorskoj matematičkoj olimpijadi Bosne i Hercegovine 2018.

Druga gimnazija godinama ima tradiciju matematičke gimnazije. Profesori Emir Kalajdžija, Amar Bašić i Emira Omeragić pokušali su da učine sve što je u njihovoj moći da tu tradiciju nastave.

Rezultati učenika Druge na takmičenjima školskoj 2017/2018. i 2018/2019. pokazuju da Druga ponovo postaje najsupješnija škola u BiH. Klub matematike bio je važan faktor u novom talasu matematičkog uspjeha u našoj školi.

Klub je počeo sa radom u februaru 2018. godine. Boris, Naida, Esma, Adi, Haris, Imana, Sandro su se upoznali u Školi matematike u organizaciji Udruženja kantona Sarajevo i kroz kampove koji su imali ogroman uticaj na njihov matematički razvoj. Njihovi rezultati su došli do izražaja još u osnovnoj školi, između ostalog i jer su bili prva generacija koja je imala kampove za osnovnu školu, na Juniorskoj balkanskoj matematičkoj olimpijadi (JBMO) 2018. Boris i Naida su osvojili srebrne medalje, a Esma bronzu. Njih troje nastavili su nizati uspjehe i naredne godine, Naida i Esma osvojile su srebro, odnosno bronzu Evropskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke (EGMO), a Boris je osvojio srebrnu medalju na Balkanskoj matematičkoj olimpijadi (BMO) i pohvalu na IMO 2019.

Njihovo druženje i rad nastavili su se kroz Klub matematike u Drugoj gimnaziji koji je osnovan prije svega zahvaljujući naporima gore pomenutih profesora. Treba istaknuti veliku podršku direktora Druge gimnazije Sarajevo Seida Alibegovića i Ministarstva obrazovanja Kantona Sarajevo. To polugodište je na neki način bilo eksperimentalno, ali je postavilo temelje za buduće funkcionisanje Kluba.

Formirane su tri grupe: jedna grupa za učenike osnovne škole i dvije grupe za učenike Druge gimnazije (jedna za učenike prvih i drugih razreda, a jedna za treće i četvrte razrede). Klub je tako funkcionisao i u školskoj 2018/2019, kada se predavačima pridružio Adnan Šabanović, bivši bh. matematički olimpijac i osvajač bronzane medalje na BMO 2018 i pohvale na IMO 2018.

Od ove školske godine postoji nova grupa i namijenjena je pretendentima za plasman na IMO i druga internacionalna takmičenja. Toj grupi predavanja drže bivši i sadašnji uspješni takmičari Druge gimnazije Adnan Šabanović, Faik Tahirović i Boris Stanković, a u rad Kluba u drugom polugodištu uključit će se i olimpijke Esma Mašić i Naida Purišević.

Pored toga, Klub ima 3 grupe ove godine, jednu za osnovnu školu, jednu za preostale učenike 1. i 2. razreda i jednu za preostale učenike 3. i 4. razreda u kojoj joj je fokus na pripremi za kantonalno i federalno takmičenje, ali i fakultet. U organizacionom smislu profesori Amar Bašić i Emir Kalajdžija zaista nose Klub na svojim plećima.

Ovim putem moramo istaći da je svaki član Kluba na svoj način pomogao razvoju Kluba, a članovima je Klub pomogao u njihovom matematičkom razvoju i upoznavanju vršnjaka koji imaju slične interese i životne ciljeve.

Kako učenici elitne grupe redovno pohađaju kampove i Školu matematike treba istaknuti da su predavanja u sklopu Kluba dodatna priprema kakvu svakako učenici Druge gimnazije, kao matematičke gimnazije, trebaju imati. Da se sve to ne bi pretvorilo u previše predavanja, a premalo samostalnog rada koji je ključan za uspjeh, predavači se trude da njihova predavanja na Klubu prate planom ono što je najbolje za učenike u tom momentu i često je fokus na diskusiji raznih ideja, različitih pristupa jednom zadatku i samostalnom radu.

Klub je svakako djelić slagalice koji se uklopio u sveopći cilj što bolje pripreme učenika. Na kraju, najvažnije je da oni steknu najbolje moguće znanje i nova prijateljstva i vjerujemo da će još mnogo godina Klub+Škola matematike i kampovi činiti dobitnu kombinaciju za učenike Druge gimnazije.