KLUB MATEMATIKE
Druga gimnazija Sarajevo

Druga gimnazija Sarajevo

Klub matematike za nadarene učenike osnovnoškolskog i srednjoškolskog uzrasta

Zadaci i rješenja ulaznog testa

1. Naći sve proste brojeve p, q, r takve da je:
$$p + 4q + 6r = 116$$

Rješenje: Prvo zaključujemo da p mora biti paran broj, pa kako je on prost to vrijedi da je $p = 2$. Sada je $4q + 6r = 114$, odakle zaključujemo da q mora biti djeljiv sa 3, pa kako je prost imamo $q = 3$, i odakle dobijamo da je $r = 17$.

2. Na svakoj karti u kutiji napisan je jedan od brojeva $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ili 7 (na svakoj karti je napisan jedan broj i svaki od brojeva je napisan na tačno jednoj karti). Naida uzima tri karte iz kutije, pogleda ih i ne pokazuje ih Esmi. Nakon toga, Esma uzima dvije karte iz kutije i ne pokazuje Naidi koje je karte uzela. Naida kaže Esmi: Znam da je suma tvojih karata parna. Esma i Naida ne znaju koje su karte ostale u kutiji.
Kolika je suma karata koje je izvukla Naida?

Rješenje: Naida je morala biti sigurna nakon što je izvukla svoje 3 karte da će suma bilo koje dvije karte koje Esma izvuče biti parna. To je moguće samo ako, nakon što je Naida izvukla svoje karte, u kutiji su sve karte iste parnosti. Kako su u kutiji ostale 4 karte, jedina opcija je da su u kutiji ostale sve 4 neparne karte. To je moguće ako je Naida izvukla sve 3 parne karte, pa je njihova suma $2 + 4 + 6 = 12$.

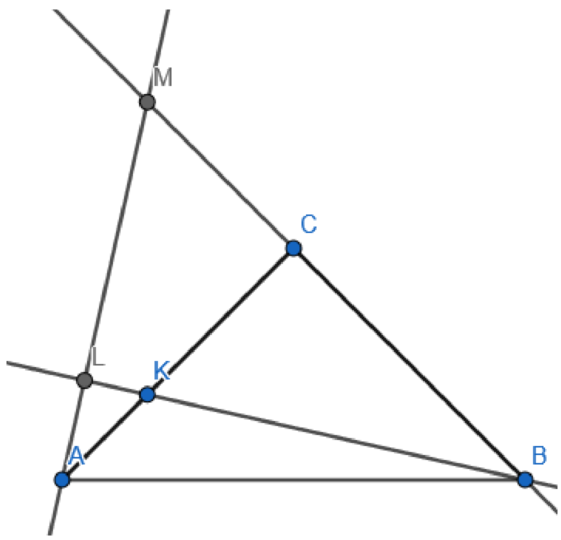
3. Ivona prodaje kruške, jabuke, breskve i banane na pijaci. Ukupno ima više od 50, a manje od 100 voćki. Broj krušaka i jabuka je isti, a zajedno čine jednu trećinu ukupnog broja voćki. Od preostalog voća $\frac{5}{7}$ nisu banane. Koliko komada jabuka i banana je imala Ivona?

   Napomena: Podrazumijeva se da je svaki broj voćki u zadatku prirodan broj.

Rješenje: Označimo broj voćki sa x. Kako je broj krušaka i jabuka isti i zajedno čini trećinu ukupnog broja voćki, zaključujemo da krušaka i jabuka pojedinačno ima po $\frac{x}{6}$. Dakle broj $\frac{x}{6}$ je prirodan. Preostalo voće je $\frac{2}{3}\,x$. Kako $\frac{5}{7}$ tog broja je prirodan broj zaključujemo da je x djeljivo sa 7. Dakle kako je x djeljivo sa 6 i 7, zaključujemo da je djeljivo sa 42. Jedini prirodan broj između 50 i 100 koji ispunjava te uslove je 84. Odavde lako dobijamo da je Ivona imala 14 jabuka i 16 banana.

4. Neka je dat jednakokraki – pravougli trougao ΔABC u kome je $\measuredangle ACB = 90°$ i $AC = BC$. Neka je K proizvoljna tačka na stranici AC. Označimo sa L podnožje normale iz tačke A na pravu BK. Neka se prave AL i BC sijeku u tački M. Dokazati da je $CM = CK$.

Rješenje:



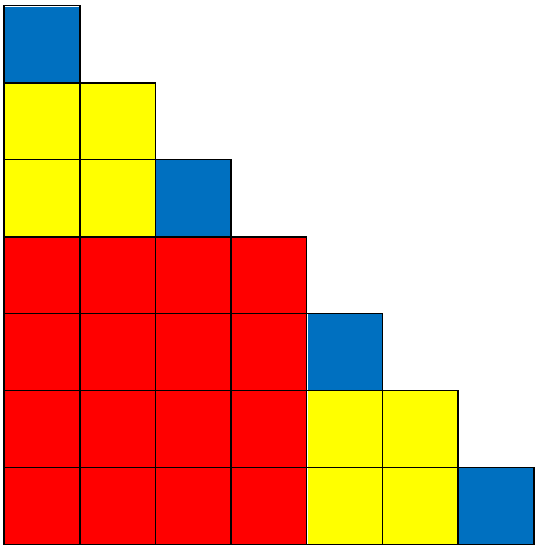
Jasno je po uslovu zadatka da je trougao ΔABC jednakokraki pravougli, te imamo da je $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 45°$. Označimo ugao $\measuredangle CBK = x$, te tada je $\measuredangle KBA = 45° - x$, a iz pravouglog trougla ΔALB je ugao $\measuredangle LAB = 45° + x$, pa je ugao $\measuredangle LAK = x$.
Posmatrajmo trouglove ΔBCK i ΔACM. Vrijedi da je:

$$\measuredangle BCK = 90° = \measuredangle ACM,\ BC = AC,\ \measuredangle KBC = x = \measuredangle MAC,$$

pa zaključujemo su ovi trouglovi podudarni po USU stavu. Iz te podudarnosti vrijedi da je $CK = CM$ što je trebalo i dokazati.

5. Ploča 7×7 je podijeljena na jedinične kvadratiće, te su iz nje odstranjeni svi kvadratići iznad glavne dijagonale. Koliko je minimalno kvadrata (nije bitno kojih dimenzija, dakle smijemo koristiti kvadrate 1×1, 2×2, 3×3, 4×4...) potrebno da se popločа ostatak figure (stranice kvadrata su prirodni brojevi)? A za ploču 15×15?
Napomena: Ukoliko je vaše rješenje broj x potrebno je da navedete (nacrtate) kako je to moguće s x kvadrata, ali i da objasnite zašto nije moguće s manje od x kvadrata.

Rješenje: Primijetimo da nam je za svaki od ćoškova „stepenica“ potreban po jedan poseban kvadrat jer nikoja dva ćoška ne možemo obuhvatiti istim kvadratom. Dakle minimalno nam treba 7 kvadrata za 7×7, odnosno 15 za 15×15. Sa 7 kvadrata možemo na slijedeći način:



Za 15×15 možemo na slijedeći način:

Stavimo centralni 8×8 i onda nam ostanu dvoje stepenice 7×7 koje znamo da možemo zasebno svake popločati sa po 7 kvadrata.